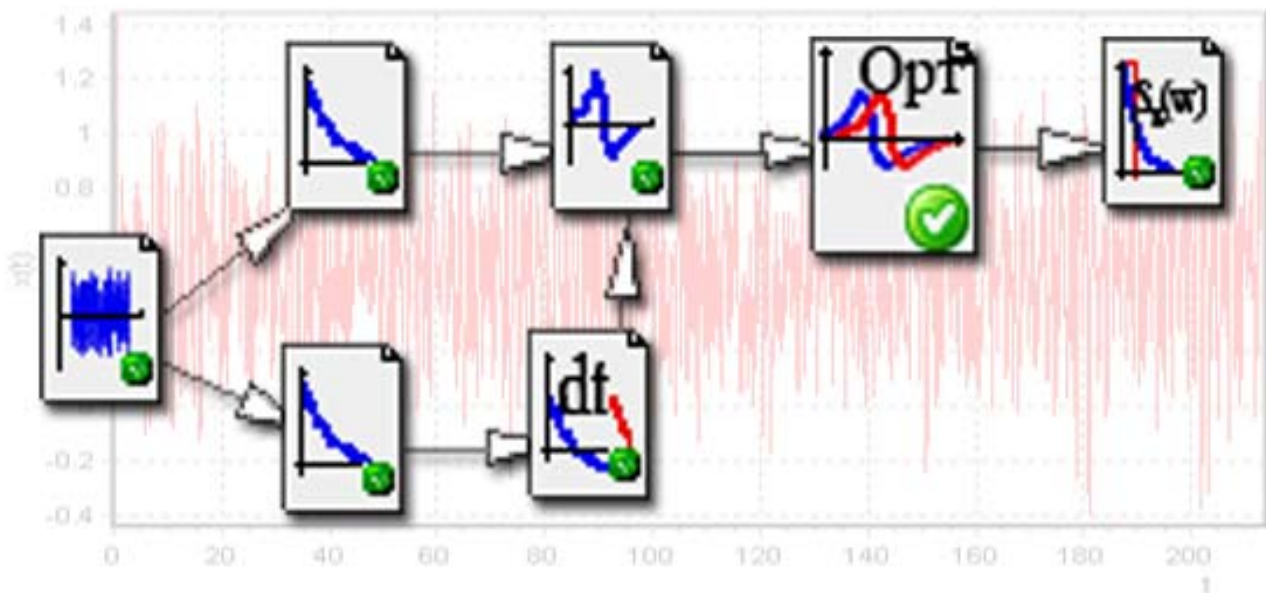


С.А. Прохоров, А.В. Графкин

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС
КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО
АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ**



Самара, 2005

Об авторах



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 275 научных трудах, в том числе, 14 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах, опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 80 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

Графкин Алексей Викторович – аспирант кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Результаты его работы нашли отражение в 11 научных трудах, в том числе 2 монографиях, выступлениях на 3 международных конференциях.



УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/
ББК 32.965я73
П55

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор Сойфер В.А.;

д.ф.-м.н., профессор Жданов А.И.

П55 Прохоров С.А., Графкин А.В. **Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах/** СИЦ РАН, 2005. 198 с., ил.

ISBN 5-93424-184-2

Анализируются алгоритмы корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах, проводится анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра, Дирихле, анализ погрешностей корреляционно-спектральных характеристик в указанных базисах, даются рекомендации по рациональному выбору параметров ортогональных моделей.

Приводится описание разработанного программного комплекса аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций и лабораторного практикума.

Монография предназначена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по моделированию и аппроксимативному корреляционно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах.

ББК 32.965я73

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

П $\frac{2402000000}{00(05) - 01}$

© С.А. Прохоров, А.В. Графкин, 2005

ISBN 5-93424-184-2

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ВВЕДЕНИЕ	10
1. АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	19
1.1. Основные понятия и определения	19
1.2. Корреляционные функции и их оценка	27
1.3. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями	34
1.4. Коэффициенты разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций	38
1.5. Алгоритм оценки параметра масштаба ортогональных функций	41
1.6. Анализ составляющих методической погрешности оценки коэффициентов разложения	47
1.7. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничениях на ее модель	53
1.8. Анализ погрешности вычисления коэффициентов разложения при ограничениях на модель корреляционной функции	59
1.9. Оценка интервалов корреляции	61
1.10. Аппроксимация взаимных корреляционных функций	66
1.11. Аппроксимация спектральной плотности мощности функциями заданного вида	71
1.12. Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями	77
2. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ КОМПЛЕКС АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО- СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	84
2.1. Назначение, основные функции и требования	84
2.2. Интерфейс пользователя	91
2.2.1. Область <i>Редактирование семантической сети</i>	92
2.2.2. Область <i>Параметры</i>	94
2.2.3. Область <i>Воздействие</i>	94
2.2.4. Область <i>Реакция</i>	95
2.2.5. Область <i>Накопители и информация об ошибках</i>	95
2.3. Узлы автоматизированного комплекса	105
2.3.1. Источник СП	110
2.3.2. Фильтр	115
2.3.3. Линия задержки	117
2.3.4. Формирователь ВКФ	120
2.3.5. Ортогональный фильтр	122
2.3.6. Формирователь спектра	127
2.3.7. Звуковая карта	130
2.3.8. МФУ НВЛ-08	132

2.3.9. Накопитель	140
2.4. Меню пользователя	141
2.5. Строка статуса	143
2.6. Справочная система	143
3. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	144
3.1. Имитационное моделирование систем генерации пар случайных процессов	144
3.1.1. Содержание лабораторной работы	144
3.1.2. Задание на самостоятельную работу	148
3.1.3. Содержание отчета	148
3.1.4. Контрольные вопросы	149
3.2. Взаимный корреляционный анализ	149
3.2.1. Содержание лабораторной работы	149
3.2.2. Задание на самостоятельную работу	154
3.2.3. Содержание отчета	154
3.2.4. Контрольные вопросы	154
3.3. Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями	155
3.3.1. Содержание лабораторной работы	155
3.3.2. Задание на самостоятельную работу	160
3.3.3. Содержание отчета	160
3.3.4. Контрольные вопросы	160
3.4. Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных	161
3.4.1. Содержание лабораторной работы	161
3.4.2. Задание на самостоятельную работу	166
3.4.3. Содержание отчета	166
3.4.4. Контрольные вопросы	166
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	168
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	170
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	172
ПРИЛОЖЕНИЯ	173
П.1. Алгоритмы рекурсивной фильтрации	173
П.2. Импульсные характеристики формирующих фильтров	175
П.3. Графики взаимных корреляционных функций	184
П.4. Формат файлов автоматизированного комплекса	197

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АСНИ – автоматизированная система научных исследований;
АЦП – аналого-цифровой преобразователь;
БСИ – блок связи с интерфейсом;
ВКФ – взаимная корреляционная функция;
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;
ВР – временной ряд;
ЗР – закон распределения;
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;
ИИС – информационно-измерительная система;
ИП – измерительный преобразователь (датчик);
К – коммутатор;
КФ – корреляционная функция;
М – количество дифференциальных коридоров;
МУ – масштабирующее устройство;
МФУ NVL08 – многофункциональное устройство NVL08;
НКФ – нормированная корреляционная функция;
ПО – процессор обработки;
ПП – псевдослучайная последовательность;
ПРИС – процессорно-измерительное средство;
СП – случайный процесс;
СУБД – система управления базой данных;
ФБ – функциональный блок;
ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь;
ЭВМ – электронная вычислительная машина;
 A_m – значение ВКФ в точке максимума;
 $A_{\Theta} \{ \widehat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки вероятностной характеристики Θ ;
 $A_s \{ \widehat{x}(t_k) \}$ – алгоритм оценки сигнала;
 b_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 c_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 $C_x(J)$ – интервальная корреляционная функция;
 $Drh_k(\tau, \alpha)$ – система ортогональных функций Дирихле;
 \widehat{D}_x – оценка дисперсии;
 d – параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 $ent[]$ – операция взятия целой части числа;
 $F\{ \}$ – функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;
 $F_x(x)$ – функция распределения вероятностей;
 $f_x(x)$ – плотность распределения вероятностей;
 $g[]$ – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

J_{max} – количество ординат на интервале корреляции корреляционной функции при линейной интерполяции;
 $K_{xy}(\tau)$ – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;
 $K_a(\tau)$ – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 $K_{xy}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция;
 $K_x(t, t')$ – корреляционная функция случайного процесса;
 $K_x(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 k_{xy} – корреляционный момент;
 k_a – коэффициент асимметрии;
 k_ε – коэффициент эксцесса;
 k_ϕ – коэффициент формы;
 $Lag_k(\tau, \alpha)$ – система ортогональных функций Лагерра;
 $Leg_k(\tau, \alpha)$ – система ортогональных функций Лежандра;
 M – количество отсчетов временного ряда;
 Me – медиана;
 Mo – мода;
 $M[]$ – оператор математического ожидания;
 \hat{m}_x – оценка математического ожидания;
 N – число реализаций;
 $ODBC$ (Open Database Connectivity) – открытое соединение баз данных;
 S_d – оператор усреднения;
 $Sign$ – знаковая функция;
 $S_{axy}(\omega)$ – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;
 $S_{xy}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность мощности;
 $S_{xn}(\omega)$ – нормированная спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 $S_x(\omega)$ – спектральная плотность мощности процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;
 SQL (Structured Query Language) – структурированный язык запросов;
 r_{xy} – коэффициент корреляции;
 t_{ji} – время i -ого отсчета в j -ой реализации случайного процесса;
 UML (Unified Modeling Language) – унифицированный язык моделирования;
 $W_k(j\omega)$ – частотная характеристика фильтра Лагерра k -го порядка;
 $|W_m(j\omega)|_{max}^2$ – максимум модуля частотной характеристики;
 $|W_m(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных функций;
 $x_i(t)$ – i -ая реализация случайного процесса;
 x_{ji} – i -й отсчет в j -ой реализации случайного процесса;
 $\bar{x}(\bar{\Theta}, t)$ – реализация случайного процесса;

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – параметры аппроксимирующего выражения;
 α_k – начальный момент k-го порядка;
 β_k – коэффициент разложения ортогонального ряда;
 χ – коэффициент вариации;
 Δ – погрешность аппроксимации;
 $\Delta\omega_\varphi$ – полоса пропускания фильтра;
 Δt_{ji} – интервал дискретизации;
 Δu – шаг квантования по уровню;
 Δx – ширина дифференциального коридора;
 $\Delta\omega_c$ – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 γ_m – методическая статистическая погрешность;
 $\gamma_{см\ доп}, \gamma_{м\ доп}$ – допустимые значения погрешностей оценки;
 $\gamma_{см}$ – погрешность от смещенности оценки;
 η – пикфактор;
 μ – показатель колебательности;
 μ_k – центральный момент k-го порядка;
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$ – j-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$ – t-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\bar{\Theta}$ – вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\Theta[X(t)]$ – измеряемая вероятностная характеристика;
 $\hat{\Theta}[X(t)]$ – оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$ – средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;
 $\rho_x(t, t')$ – нормированная корреляционная функция случайного процесса;
 $\rho_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho_{xy}(\tau)$ – взаимная нормированная корреляционная функция;
 $\tau_k^{(i)}$ – интервал корреляции;
 $\tau_{k\ max}$ – максимальный интервал корреляции;
 τ_m – значение времени в точке максимума (разделения ветвей);
 $\bar{\Omega}$ – вектор информативных параметров объекта исследований;
 $\|\psi_k\|^2$ – норма системы ортогональных функций;
 ψ_k – система ортогональных функций;
 δ – среднеквадратическая погрешность аппроксимации;
 $\delta(t)$ – δ -функция Дирака;
 δ_{ji} – индикатор состояния.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография подготовлена для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по аппроксимативному корреляционно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах Дирихле, Лагерра и Лежандра и дополняет следующие монографии и методические пособия:

1. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 209 с.: ил.

2. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 375 с.: ил.

3. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. 329 с.: ил.

4. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.

5. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. 191 с.: ил.

6. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с., ил.

7. Прохоров С.А., А.В. Иващенко, А.В. Графкин.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. - СНЦ РАН, 2003. 286 с., ил.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ) и использовались при подготовке студентов по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГАУ.

Монография состоит из трех глав и приложений.

В первом разделе анализируются алгоритмы корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах, проводится анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения в том или ином ортогональном базисе, анализ погрешностей корреляционно-спектральных характеристик, даются рекомендации по рациональному выбору параметров ортогональных моделей.

Второй раздел посвящен описанию разработанного комплекса аппроксимативного анализа корреляционно-спектральных характеристик с использованием ортогональных функций. При проектировании комплекса применялись CASE-технологии, в частности **Rational Rose 2000e**, которая базируется на унифицированном языке моделирования **UML**. Предлагаемый комплекс может применяться как для проведения научных исследований, так и в учебном процессе.

В третьем разделе приведено описание **лабораторного практикума**, содержащего четыре лабораторные работы, выполнение которых позволит закрепить теоретический материал, изложенный в первой главе.

Лабораторный практикум целиком поставлен на разработанном программном комплексе. В нём учтены замечания преподавателей, аспирантов и студентов, отмеченные в ходе выполнения лабораторных работ предыдущего лабораторного практикума [5-7] на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.

Все это, на наш взгляд, способствует улучшению наглядности при изучении базовых дисциплин, связанных с моделированием и статистической обработкой случайных процессов.

В моделировании алгоритмов, тестировании программного комплекса на разных этапах работы принимали участие студенты кафедры информационных систем и технологий: Графкин В.В., Куликовских И.М., Москаленко И.С. и многие другие, которым авторы выражают свою благодарность.

Особую благодарность авторы выражают своим учителям, всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов монографии, лабораторного практикума, критические замечания которых по мере возможности были учтены.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, д.т.н., профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также рецензенту заведующему кафедрой прикладной математики д.ф.м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании практикума оказала инженер кафедры информационных систем и технологий СГАУ Муравьева Е.В., которой авторы выражают свою благодарность.

Большую благодарность авторы выражают руководству СНЦ РАН: академику РАН Шорину В.П., д.т.н. Санчугову В.И., д.т.н., профессору Лазареву Ю.Н., - а также директору Западно-Казахстанского филиала ОАО «Национальный центр экспертизы и сертификации» (г. Уральск) Графкину В.Н. за дружескую поддержку и издание монографии в Казахстане.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp@smr.ru

ВВЕДЕНИЕ

При конструировании модели любого физического объекта в начале разрабатывается его физическая модель, в которой описывается принцип действия. Затем разрабатывается математическая модель, в которой устанавливаются количественные зависимости между входными и выходными параметрами объекта. На основе математической модели разрабатывается вычислительная модель, представляющая собой программу для ЭВМ. Имея вычислительную модель, можно проводить вычислительный эксперимент – исследование характеристик объекта путём многократного выполнения программы вычислительной модели при разных исходных данных.

Если движение и преобразование информации в рамках вычислительной модели имитирует физические процессы в объекте моделирования, то вычислительный эксперимент называется имитационным моделированием.

Среди методов прикладного системного анализа имитационное моделирование является самым мощным инструментом исследования сложных систем, управление которыми связано с принятием решений в условиях неопределенности. По сравнению с другими методами такое моделирование позволяет рассматривать большое число альтернатив, улучшать качество управленческих решений и точнее прогнозировать их последствия. Этими обстоятельствами и определяется та обширная область человеческой деятельности, в которой имитационное моделирование по праву занимает достойное место.

При имитационном моделировании динамические процессы системы-оригинала подменяются процессами, имитируемыми в абстрактной модели, но с соблюдением основных правил (режимов, алгоритмов) функционирования оригинала. В процессе имитации фиксируются определенные события и состояния или измеряются выходные воздействия, по которым вычисляются характеристики качества функционирования системы.

Для моделирования необходимо создать модель и провести ее исследование. Перед созданием модели требуется конкретизировать цели моделирования. После исследования производится обработка и анализ результатов моделирования.

Процесс создания моделей проходит несколько стадий. Он начинается с изучения реальной системы, ее внутренней структуры и содержания взаимосвязей между ее элементами, а также внешних воздействий, и завершается разработкой модели. В укрупненном плане имитационное моделирование предполагает наличие следующих этапов:

1. разработка концептуальной модели;
2. подготовка исходных данных;
3. выбор средств моделирования;
4. разработка программной модели;
5. проверка адекватности и корректировка модели;
6. планирование машинных экспериментов;
7. собственно моделирование;
8. анализ результатов моделирования и принятие решения.

Для одной и той же системы можно составить множество моделей. Они будут отличаться степенью детализации и учета тех или иных особенностей и режимов функционирования, отражать определенный режим работы системы, ориентироваться на исследование определенных ее свойств. Поэтому все этапы имитационного моделирования определяются заранее сформулированной целью исследования.

Очевидно, что особую важность для моделирования имеют первые три этапа. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть их более подробно.

После определения цели моделирования строится концептуальная модель исследуемой системы. Концептуальная модель (содержательная модель) – это абстрактная модель, определяющая состав и структуру системы, свойства элементов и причинно-следственные связи, присущие анализируемой системе и существенные для достижения целей моделирования. В концептуальной модели обычно в словесной форме приводятся сведения о природе и параметрах элементарных явлений исследуемой системы, о виде и степени взаимодействия между ними, о месте и значении каждого элементарного явления в общем процессе функционирования системы.

Следующим шагом на пути создания концептуальной модели служит выбор уровня детализации модели (стратификация). Модель системы представляется в виде совокупности частей (подсистем, элементов). В эту совокупность включаются все части, которые обеспечивают сохранение целостности системы, с одной стороны, с другой – достижение поставленных целей моделирования.

В дальнейшем производится окончательная детализация, локализация (выделение системы из окружающей среды), структуризация (указание и общее описание связей между выделенными элементами системы), укрупненное описание динамики функционирования системы и ее возможных состояний.

При создании концептуальной модели практически параллельно формируется область исходных данных (информационное пространство системы). На данном этапе выявляются количественные характеристики (параметры) функционирования системы и ее элементов, численные значения которых составят исходные данные для моделирования.

Очевидно, что значительная часть параметров системы – это случайные величины. Поэтому особое значение при формировании исходных данных имеют определение типовых моделей случайных величин, аппроксимация функций и т.д.

Программные и технические средства моделирования выбираются с учетом ряда критериев. Непременное условие при этом – достаточность и полнота средств для реализации концептуальной модели. Среди других критериев можно назвать доступность, простоту и легкость освоения, скорость и корректность создания программной модели.

Если выбор технических средств не вызывает особых затруднений, то выбор программных средств зачастую довольно сложен. В настоящее время известно более 500 языков моделирования. Такое множество языков частично

обусловлено разнообразием классов моделируемых систем, целей и методов моделирования. Однако желание упростить и ускорить процесс создания моделей привело к реализации идеи автоматизации программирования имитационных моделей. Создан ряд систем, которые избавляют исследователя от программирования. Программа создается автоматически по одной из формализованных схем на основании задаваемых исследователем параметров системы, внешних воздействий и особенностей функционирования. Это наиболее перспективное направление развития средств имитационного моделирования.

Успешность проведения работ на первых трех этапах моделирования создает условия для успешного выполнения всех последующих мероприятий.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Omega}, t)$ с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$: $\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta})$, используемое для построения искомой модели объекта;
5. анализирует полученные результаты;
6. если результаты его устраивают – эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3, 4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу – специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;
5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой – зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Условно имитационную модель можно представить в виде программно (или аппаратно) реализованных блоков. На рис. В.1 показана структура имитационной модели. Блок имитации внешних воздействий формирует реализации случайных или детерминированных процессов, имитирующих воздействия внешней среды на объект. Блок обработки результатов предназначен для получения информативных характеристик исследуемого объекта. Необходимая для этого информация поступает из блока математической модели объекта. Блок управления реализует способ исследования имитационной модели, основное его назначение – автоматизация процесса проведения имитационного эксперимента.



Рисунок В.1. Структура имитационной модели

Целью имитационного моделирования является конструирование имитационной модели объекта и проведение имитационного эксперимента над ней для изучения закона функционирования и поведения с учетом заданных ограничений и целевых функций в условиях имитации и взаимодействия с внешней средой. С учетом того, что в работе рассматриваются вопросы корреляционно-спектрального анализа, объект исследования заменяется инвариантным ему моделирующим алгоритмом.

К достоинствам метода имитационного моделирования могут быть отнесены:

- проведение имитационного эксперимента над математической моделью системы, для которой натурный эксперимент не осуществим, эксперимент связан с опасностью для жизни, или он дорог;
- решение задач, аналитические методы для которых неприменимы, например, в случае аппроксимации взаимных корреляционных функций случайных величин, нелинейных характеристик элементов системы и т.п.;
- возможность анализа общесистемных ситуаций и принятия решения с помощью ЭВМ, в том числе для таких сложных систем, выбор критерия сравнения стратегий поведения которых на уровне проектирования не осуществим;
- сокращение сроков и поиск проектных решений, которые являются оптимальными по некоторым критериям оценки эффективности;

- проведение анализа вариантов структуры больших систем, различных алгоритмов управления, изучения влияния изменений параметров системы на ее характеристики и т.д.

Основными методами имитационного моделирования являются: аналитический метод, метод статического моделирования и комбинированный (аналитико-статистический) метод.

Аналитический метод применяется для имитации процессов в основном для малых и простых систем, где отсутствует фактор случайности. Например, когда процесс их функционирования описан дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями. Метод назван условно, так как он объединяет возможности имитации процесса, модель которого получена в виде аналитически замкнутого решения, или решения, полученного методами вычислительной математики.

Метод статистического моделирования первоначально развивался как метод статистических испытаний (Монте-Карло). Это – численный метод, состоящий в получении оценок вероятностных характеристик, совпадающих с решением аналитических задач (например, с решением уравнений и вычислением определенного интеграла). В последствии этот метод стал применяться для имитации процессов, происходящих в системах, внутри которых есть источник случайности или которые подвержены случайным воздействиям.

Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, где они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило, реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;

- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рисунке В.2.

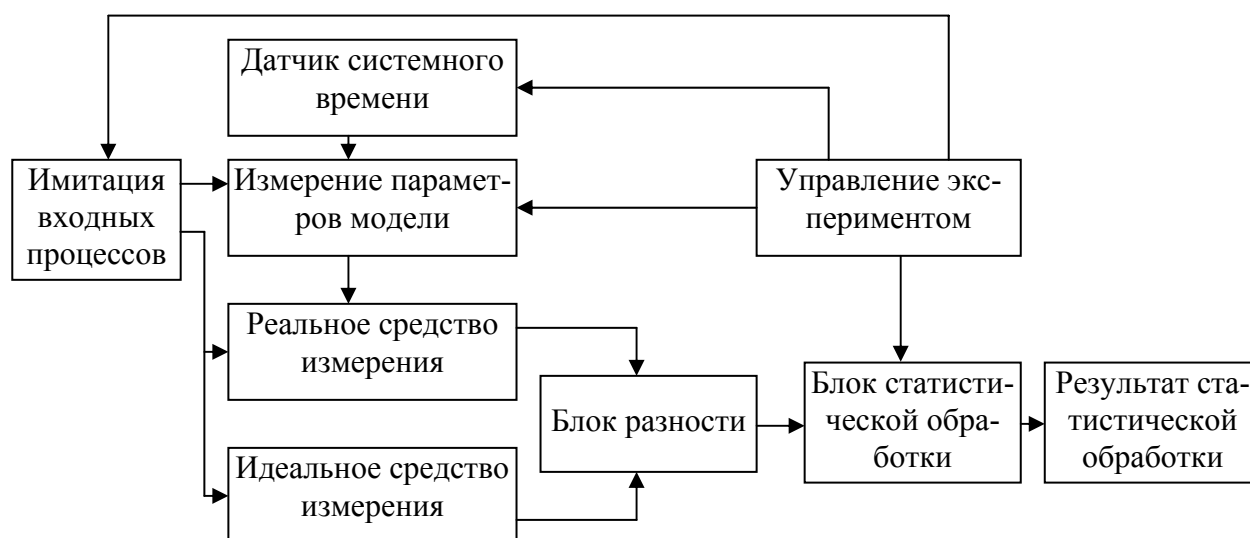


Рисунок В.2. Функциональная схема имитационного моделирования

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Комбинированный метод (аналитико-статистический) позволяет объединить достоинства аналитического и статистического методов моделирования. Он применяется в случае разработки модели, состоящей из различных модулей, представляющих набор как статистических, так и аналитических моделей, которые взаимодействуют как единое целое. Причем в набор модулей могут входить не только модули, соответствующие динамическим моделям, но и модули, соответствующие статическим математическим моделям.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [16], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.
- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [17], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \{ |\Delta_j| \} j = 1, \dots, N, \quad (B.1)$$

где N – число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d=0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ, имитационного моделирования алгоритмов оценивания вероятностных характеристик, временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, должна состоять из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью по-

грешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий (см. рис. В.3).

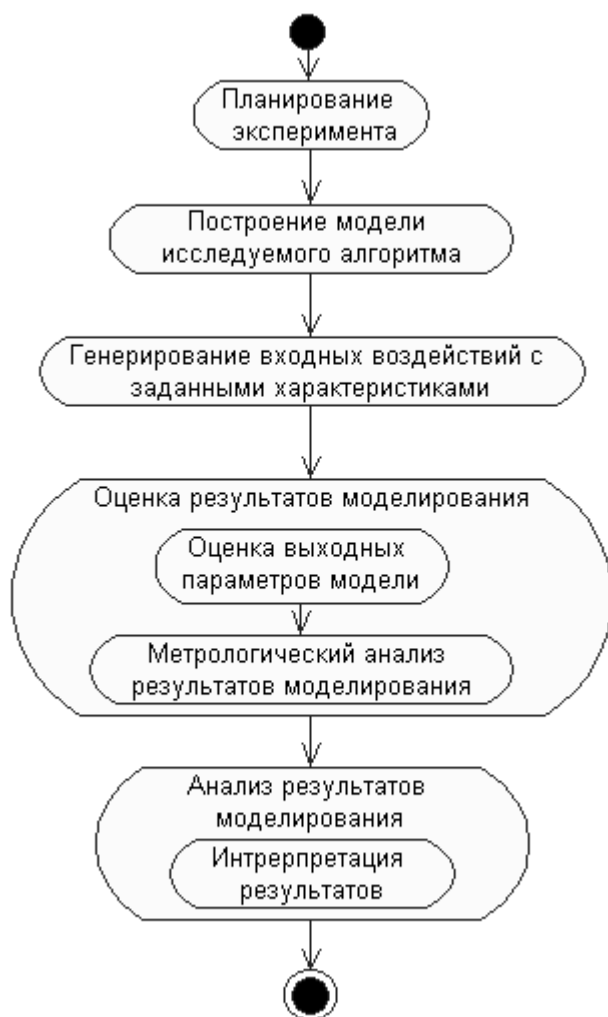


Рисунок В.3

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;

- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

Количество входных сигналов, одновременно обрабатываемых в модели системы, определяется сложностью системы, сложностью модели, количеством каналов и т.д. Т.е. в системе моделирования должна быть предусмотрена возможность генерирования N сигналов как с одинаковыми, так и различными характеристиками.

Отметим, что используемые в работе термины «генерирование случайных процессов» и «моделирование случайных процессов» являются синонимами.

1. АЛГОРИТМЫ АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

1.1. Основные понятия и определения

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. 1.1).

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [21] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (1.1)$$

где Θ – измеряемая вероятностная характеристика;

S_d – оператор идеального усреднения;

d – параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ – j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (1.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] (j = 1, 2 \dots N). \quad (1.5)$$

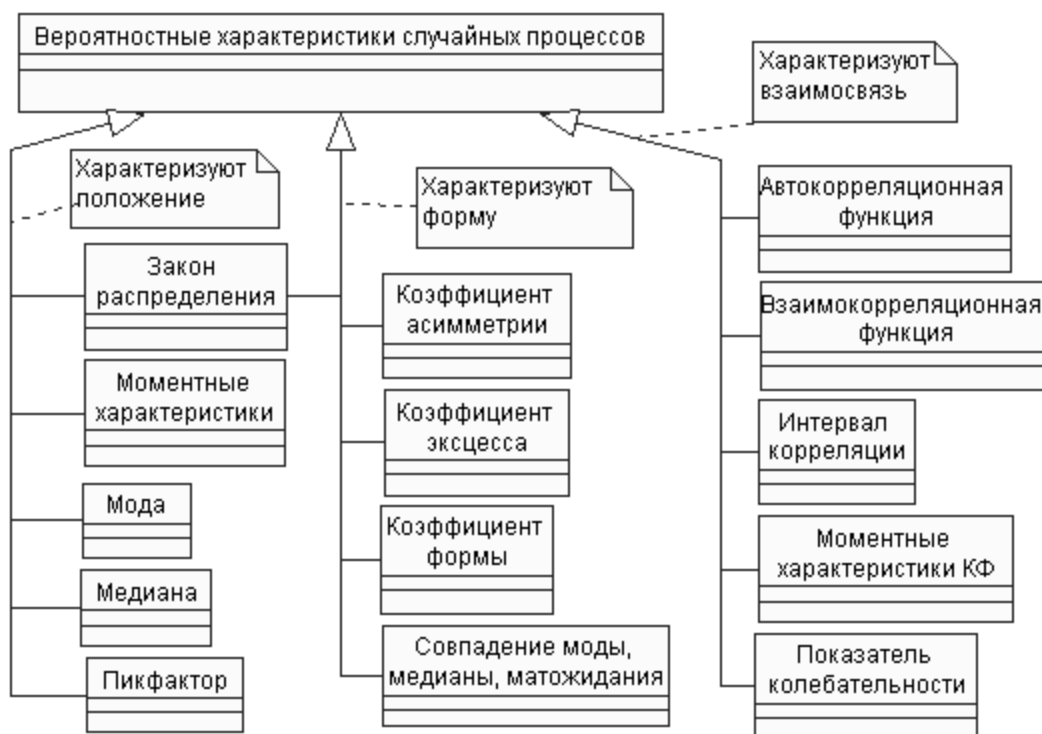


Рисунок 1.1. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (1.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (1.7)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [7].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (1.2)-(1.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (1.8)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.9)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.10)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется *t*-текущей характеристикой $\hat{\Theta}_t$ [22]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации *j*, вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется *j*-текущей характеристикой $\hat{\Theta}_j$. При усреднении и по времени, и совокупности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой – $\hat{\Theta}_{cp}$.

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = const$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = const$, где *j* – номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализаций имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. 1.2):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание – **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

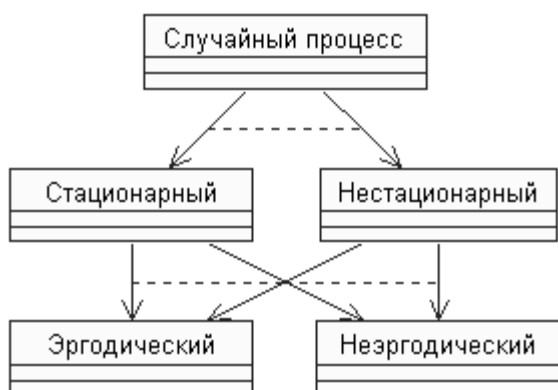


Рисунок 1.2. Классификация случайных процессов

В многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки работы.

В [21] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_t = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса – $\Theta_t = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического – $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [21]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

Прямым методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (1.1).

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , Θ_{cp} , – во

Косвенным методом статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_l(t_i^{(y)})]\dots\}, \quad (1.11)$$

где $F\{\}$ представляет собой функциональное преобразование полученных оценок $\hat{\Theta}[x(t)]$ и $\hat{\Theta}[y(t)]$ и т.д. с целью получения оценки $\hat{\Theta}[z(t)]$.

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинацией:

$$\Xi_i \{S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\} = 0; \quad (1.12)$$

$$\Xi_i \{F^{(1)}\{S_{d1}g^{(1)}[x_j^{(1)}(t_i^{(1)})]\}, \dots, F^{(m)}\{S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\}\} = 0. \quad (1.13)$$

Автоматизированные системы научных исследований дают возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов – временные ряды**.

В этом случае выражения (1.2)-(1.4) при представлении случайного процесса $X(t)$ ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (1.14)$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (1.15)$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (1.16)$$

где t_i – i -ый отсчёт j -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (В.5) примет вид:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] (j = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, M). \quad (1.17)$$

Выражения (1.8)-(1.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (1.18)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (1.19)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (1.20)$$

Выделяют первичную и вторичную статистическую обработку. Под **первичной** статистической обработкой будем понимать оценку вероятностных характеристик по ограниченному набору данных, под **вторичной** – построение аналитических моделей исследуемых процессов и их характеристик [14].

Если не принимать во внимание фактор реального времени или задержку в обработке информации, то с точки зрения получения оценки по одному и тому же объему данных два подхода с методической точки зрения не отличаются друг от друга. Существенное отличие заключается в том, что работа в реальном масштабе времени накладывает жесткие ограничения на быстродействие технических средств. Это заставляет, в свою очередь, при статистических измерениях применять упрощенные алгоритмы оценивания интересующих параметров, обладающих значительным быстродействием. Кроме того, работа в реальном масштабе времени не дает возможности получить требуемые оценки, воспользовавшись другими алгоритмами, так как данную реализацию повторить нельзя – она **случайна**. Требуемую оценку необходимо получить за время, отводимое на эксперимент. Реализация же, записанная на промежуточный носитель или в память, становится **детерминированной**, и с ней можно экспериментировать сколь угодно долго. Это важное преимущество статистической обработки позволяет:

- с целью повышения точности оценивания осуществить оценку одного параметра с помощью различных алгоритмов обработки информации;
- выбрать оптимальный алгоритм оценивания, соответствующий выбранному критерию;
- с целью построения новой или уточнённой модели осуществить оценку других параметров, описывающих эту модель.

При исследовании сложных объектов проводят, как правило, большое число испытаний. При этом происходит и накопление большого числа массивов числовых и функциональных характеристик, что в значительной степени затрудняет хранение, анализ и интерпретацию полученных результатов.

Один из возможных способов решения этой проблемы заключается в применении аппроксимативных методов (от латинского слова **approximo** - приближаюсь), суть которых заключается в нахождении подходящего аналитического выражения $\varphi(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющими заданному критерию оптимальности, которое бы описывало найденные экспериментальные результаты. Аппроксимативный подход оказывается эффективным и при обработке результатов имитационного моделирования (вычислительного эксперимента).

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости $\hat{y}_i = f(\hat{x}_i)$. Желательно обработать экспериментальные данные таким образом, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x и вместе с тем сгладить случайные отклонения, вызванные погрешностями самого эксперимента.

Наиболее эффективным методом решения этой задачи является метод наименьших квадратов [5].

Пусть задан некоторый класс функций $\varphi_j(x(t), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с одинаковым числом неизвестных параметров. Тогда наилучшей будет та функция, для которой сумма квадратов

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^M [\hat{y}_i - \varphi_j(\hat{x}_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 = \min. \quad (1.21)$$

Если в сравнении участвуют функции с различным числом неизвестных параметров, это приводит к увеличению числа связей и к уменьшению числа степеней свободы $m-l$, что, в свою очередь, может ухудшить дисперсию [5].

$$D_j = \frac{\Delta_j}{m-r}. \quad (1.22)$$

Под числом связей r понимают число неопределенных выражений, входящих в аналитическое выражение.

Так как Δ_j является функцией $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ то, как известно [5], необходимыми условиями минимума дифференцируемой функции многих переменных является система нормальных уравнений:

$$\frac{\partial S(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.23)$$

решив которую с помощью того или иного численного метода, найдем искомые параметры $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Классификация методов аппроксимации функциональных характеристик случайных процессов и последовательностей представлена на рис. 1.3.

Основными преимуществами аппроксимативного подхода являются:

- наглядность и компактность полученного аналитического выражения, легкость визуализации;
- возможность использования аналитического выражения для дальнейших аналитических исследований и преобразований, с целью получения обобщенных вероятностных характеристик;
- сокращение объёма хранимых данных.

К недостаткам метода следует отнести наличие методической погрешности, возникающей при замене полученных экспериментальных данных или другой функции более простым аналитическим выражением.

В общем случае, для реализации аппроксимативного подхода необходимо выполнить следующие этапы:

1. на основании анализа решаемой задачи определить требования к реализации входного процесса (последовательности): длине реализации (объёму выборки), интервалу дискретизации, числу уровней квантования и т.д. с целью получения оценок вероятностных характеристик для последующей аппроксимации с допустимыми погрешностями;

2. по измеренным значениям входного процесса (последовательности) оценить значения функциональной характеристики в заданных точках;

3. проанализировать полученный результат и выбрать подходящее аналитическое выражение, по возможности, с минимальным количеством неизвестных параметров, подлежащих определению, так как количество параметров

в значительной мере определяет сложность аппаратуры или вычислений, его сходимость и устойчивость;

4. выбрать и обосновать критерий приближения;

5. составить и решить систему уравнений относительно неизвестных параметров аналитического выражения и определить погрешность приближения;

6. разработать структурную схему аппаратуры (программы) и рассчитать её параметры;

7. изготовить и отладить аппаратуру (написать и отладить программное обеспечение);

8. провести экспериментальные исследования (обработать полученные экспериментальные данные);

9. аналитически определить все интересующие обобщённые вероятностные характеристики.

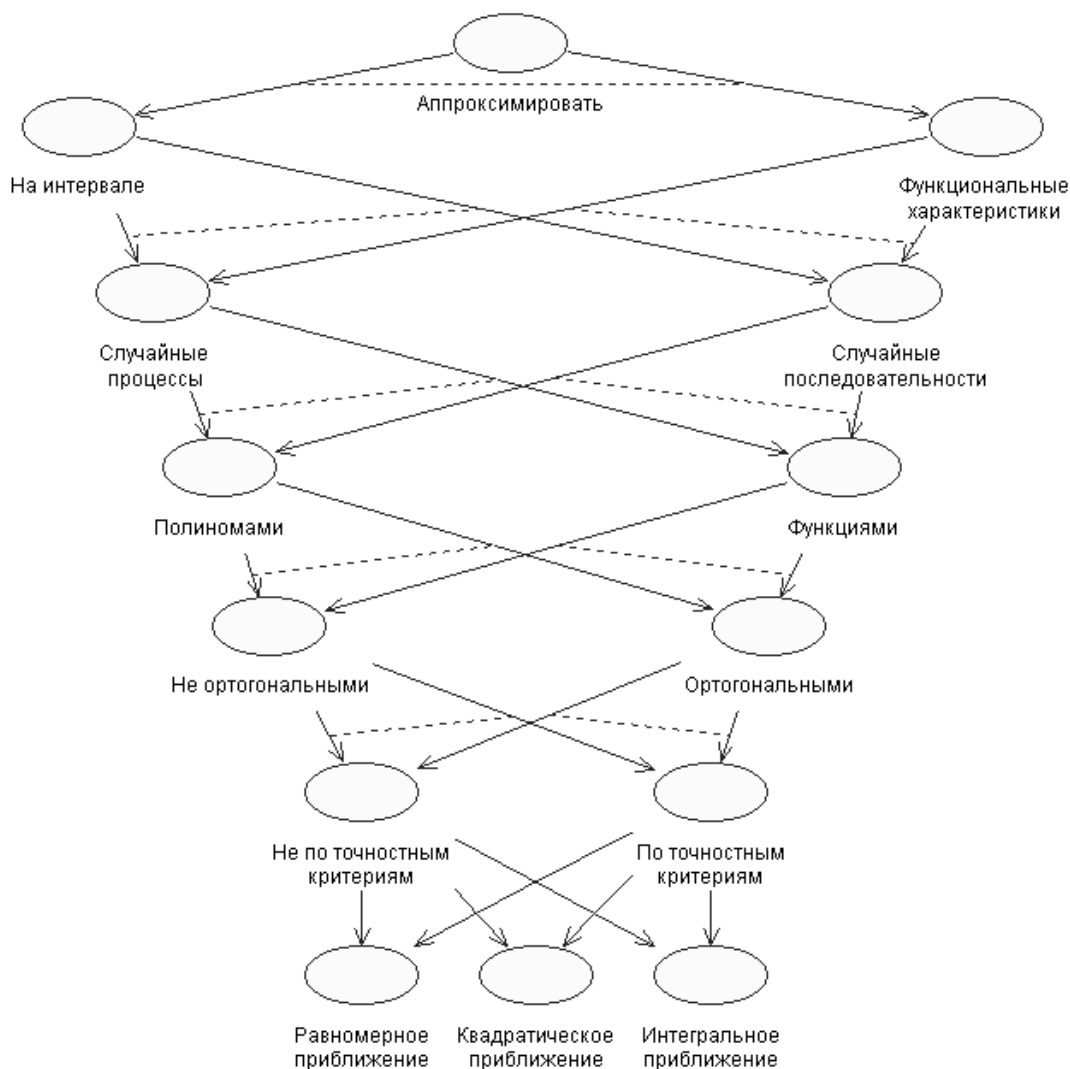


Рисунок 1.3. Классификация методов аппроксимации случайных процессов

Следует отметить, что определять аналитические выражения возможно как при анализе стационарных, так и нестационарных процессов. В первом случае анализируются функциональные характеристики, во втором – и моментные, являющиеся функциями времени.

Определять параметры аналитических выражений возможно как с помощью **статистических измерений**, так и в результате **статистической обработки**.

Под **статистическими измерениями с аппроксимацией** будем понимать измерение (оценку) параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени. Самыми популярными среди таких технических средств являются **коррелометры** и **спектроанализаторы** с аппроксимацией параметрическими моделями. В литературе их часто называют **статистическими анализаторами**. Статистические анализаторы, как правило, специализированные аппаратно-программные средства, определяющие **параметры реального процесса** (см. рис. 1.4).

Под **статистической обработкой с аппроксимацией** будем понимать оценку параметров аппроксимирующего выражения вероятностной функциональной характеристики случайных процессов с помощью ЭВМ, записанных на промежуточный носитель или память. При этом происходит временная задержка в обработке информации.

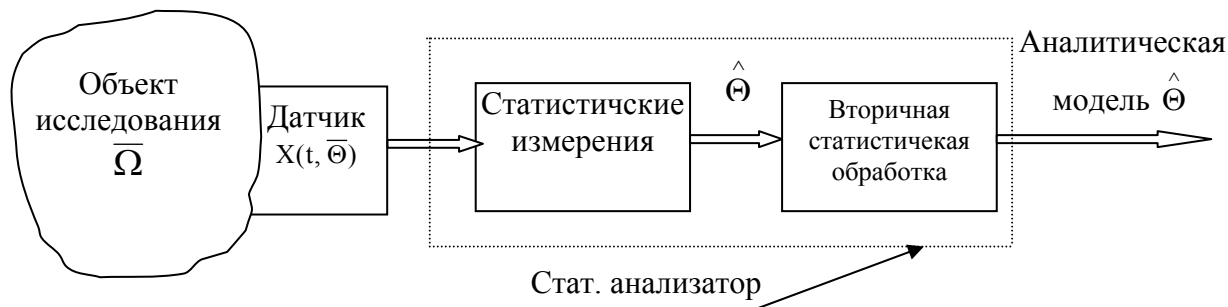


Рисунок 1.4. Аппаратно-программные средства статистических измерений и обработки информации

Аппроксимативные методы, основанные на применении ЭВМ, можно отнести к методам **вторичной обработки** информации.

1.2. Корреляционные функции и их оценка

В различных приложениях статистического анализа одну из ключевых позиций занимают задачи корреляционного анализа. В процессе решения этих задач выявляется наличие и характер линейной взаимосвязи между сечениями процессов, вычисляются оценки коэффициентов и интервалов корреляции. На основании результатов корреляционного анализа может делаться вывод о нали-

чи и характере функциональной зависимости или о предпочтительности для описания исследуемого объекта регрессионной модели того или иного вида.

Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем, выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса, оценивать погрешности средств измерений, определять скорость проката, строить корреляционные приёмники и т.д. [4, 17]. Для экспериментального определения корреляционных функций применяются как специализированные вычислительные средства – коррелометры, так и универсальные электронно-вычислительные машины.

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент ее значений при двух значениях аргумента t и t' , рассматриваемый как функция [10]:

$$K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (1.24)$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, а $m_x(t)$ – математическое ожидание случайного процесса в сечении t .

Корреляционная функция характеризует степень линейной связи между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.25)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией [12 стр. 36]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (1.26)$$

Это позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале $[0, \infty)$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.25), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.27)$$

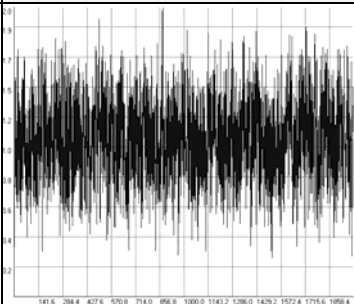
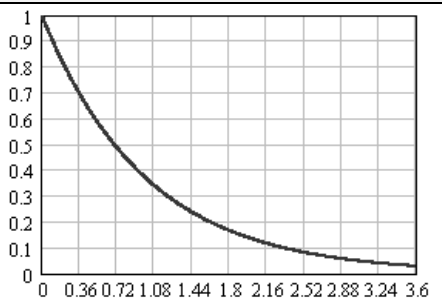
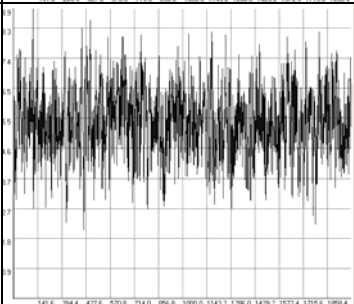
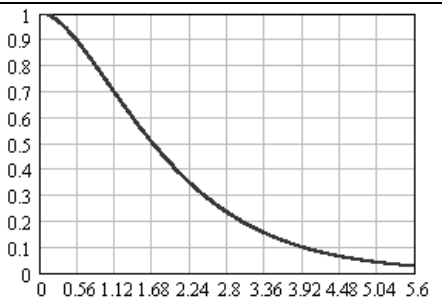
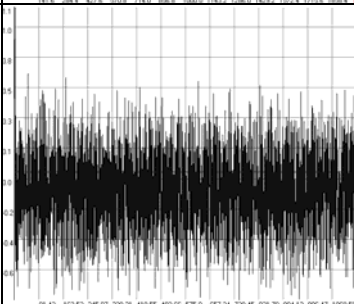
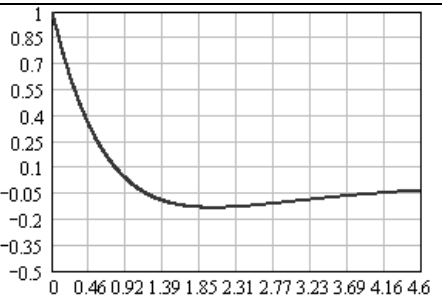
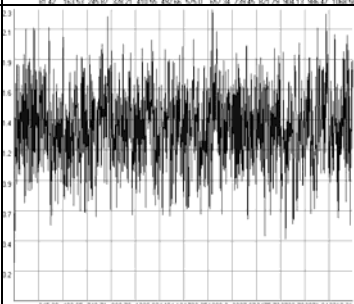
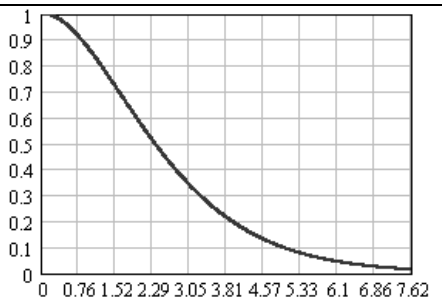
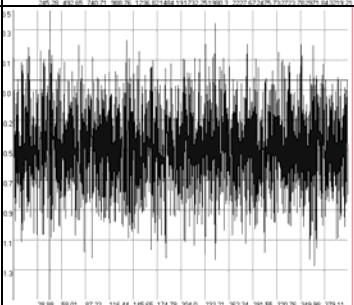
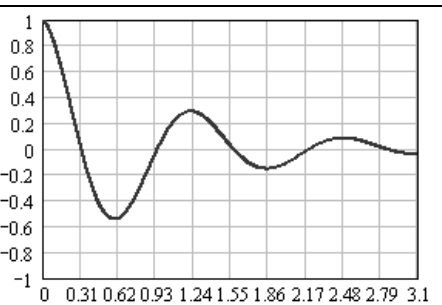
Отсюда видно, что

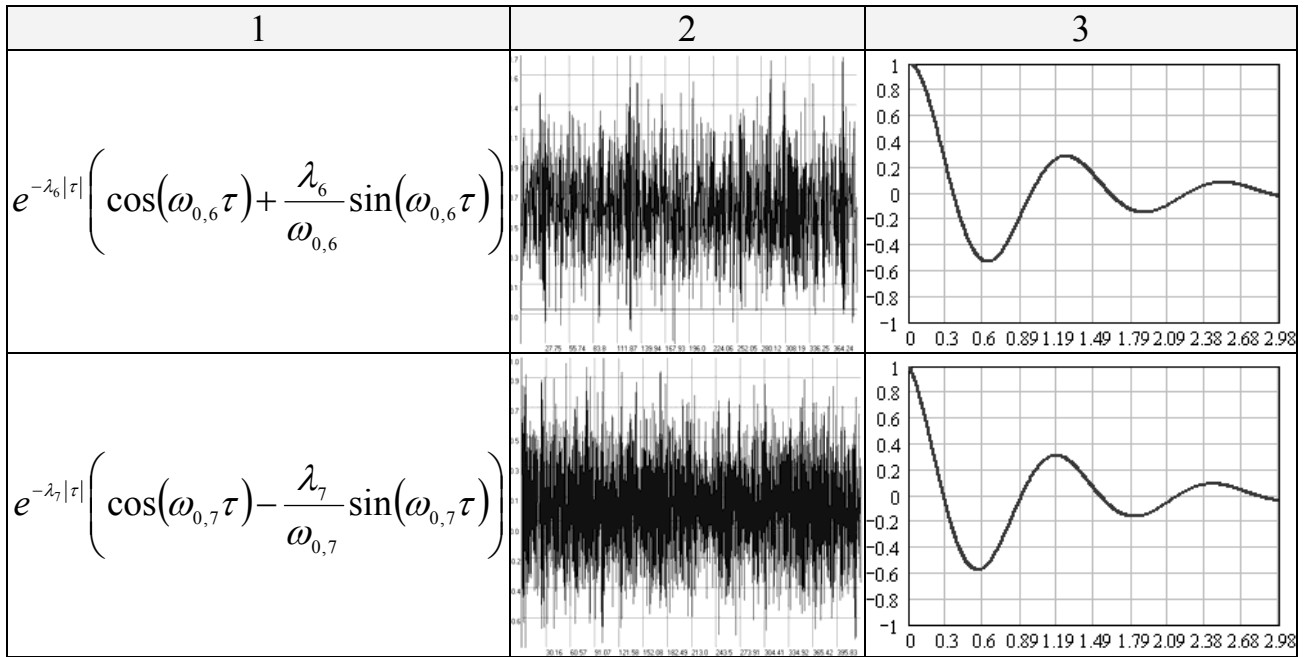
$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.28)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 1.1, а их классификация – в [12]. В таблице 1.1 приведены типовые модели для значения параметров $\lambda_i = 1$ и $\omega_{0,i} = 5$.

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 1.1

Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	Случайный процесс	Корреляционная функция
1	2	3
$e^{-\lambda_1 \tau }$		
$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau)$		
$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau)$		
$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$		
$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$		



Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $x(t)$ и случайной функции $y(t)$:

$$K_{xy}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right]. \quad (1.29)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

При одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (1.30)$$

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_y(t')}}. \quad (1.31)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [22] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $\tau = t - t'$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.25), равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (1.32)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (1.33)$$

Из свойства (1.30) взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций $x(t)$ и $y(t)$, взятых в различных порядках, связаны соотношением

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (1.34)$$

Графически это означает, что кривая $\rho_{yx}(\tau)$ является зеркальным отражением кривой $\rho_{xy}(\tau)$ относительно оси ординат (рис. 1.5).

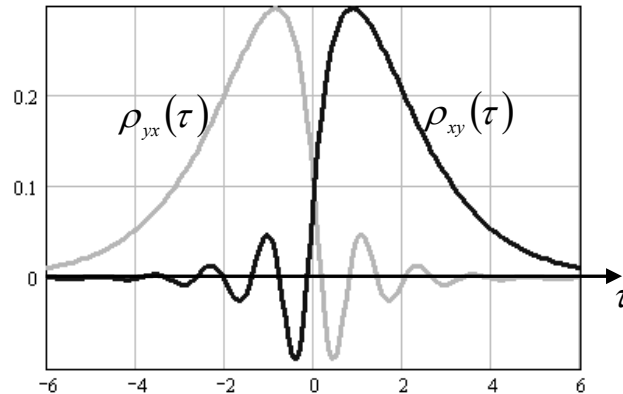


Рисунок 1.5. Взаимные корреляционные функции

Результаты эксперимента с помощью информационно-измерительных систем, автоматизированных систем научных исследований, либо в ходе цифрового моделирования того или иного процесса или явления могут быть представлены в виде случайной последовательности:

$$\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{i=1, \dots, M}^{j=1, \dots, N}, \quad (1.35)$$

где x_{ji} – i -й отсчет в j -ой реализации случайного процесса;

t_{ji} – время i -ого отсчета в j -ой реализации;

M – количество отсчетов временного ряда;

N – число реализаций.

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}. \quad (1.36)$$

При $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 = const$ исследователь имеет дело с регулярной временной последовательностью – регулярным временным рядом.

Для оценки корреляционной функции при анализе последовательностей, с усреднением по времени, используют выражение:

$$\hat{K}_{xy}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji}^{\circ} x_{j,i+J}^{\circ}, \quad (1.37)$$

где x_{ji}° – центрированный отсчет в реализации случайного процесса;

$J\Delta\tau$ – интервал сдвига (максимальное значение J не должно превышать M).

Центрированные значения отсчетов определяются по формуле:

$$x_{ji}^{\circ} = x_{ji} - \hat{m}_x, \quad (1.38)$$

где \hat{m}_x – оценка математического ожидания (2.1) случайного процесса в сечении $i\Delta\tau$, j -ой реализации.

Для оценки взаимной корреляционной функции используют выражение:

$$\hat{K}_{xyj}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}, \quad (1.39)$$

где y_{ji} – центрированный отсчет в реализации случайного процесса.

Как показали исследования [11], для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), количество отсчетов временного ряда M должно составлять 5000-2000 соответственно.

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией, при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса [7]. При этом интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным $\Delta\tau = \Delta t_0$.

Значение интервала дискретизации $\Delta\tau$ зависит от вида корреляционной функции, значения ее параметров, допустимой погрешности δ и способа восстановления корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции J_{\max} при линейной интерполяции и различных погрешностях ее восстановления представлено в таблице 2.1.

При аналитическом исследовании поведения реальных динамических систем важным является обоснование математических моделей процессов, протекающих в этих системах. В ходе формирования методов анализа и синтеза эти модели, с одной стороны, должны наиболее адекватно отражать свойства реальных сигналов, с другой – допускать исследования этих процессов известными теоретическими методами. Выход следует искать на основе компромиссных решений в части выбора наиболее простых и в то же время содержательных (продуктивных) моделей при решении интересующих задач. Рассматриваемые в данной работе модели случайных процессов являются наиболее типичными в практике исследований динамических систем с учетом реальных режимов, возмущений и помех и во многих случаях могут служить базовыми при формировании более сложных процессов.

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации определяются параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений ее параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т. д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объем хранимой информации, так как вместо

большого числа отсчетов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения ее параметров.

В общем виде задача аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями состоит из этапов, представленных на рис. 1.6.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет зависеть точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

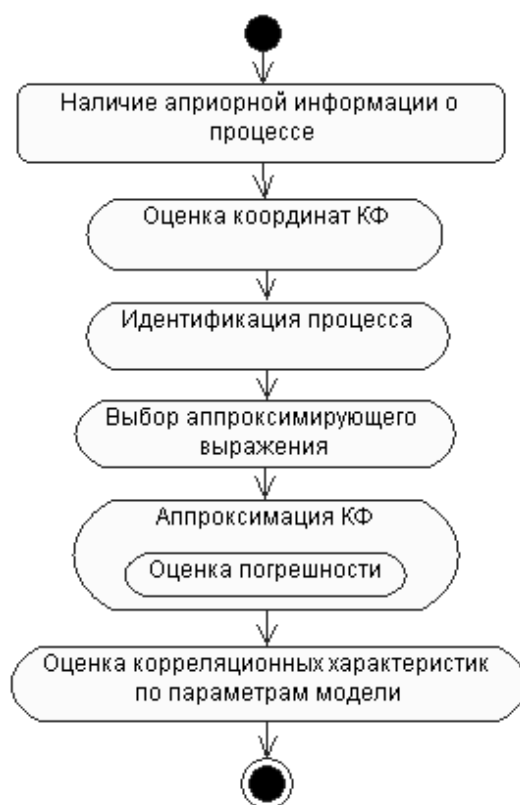


Рисунок 1.6. Диаграмма деятельности (UML). Аппроксимация КФ

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [14];
- бесконечный (или конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [14, 19].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего неизвестно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [14]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсерера [13], согласно которой симметричная и положительно

определенная функция, которой является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желательно с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя.

Многочисленные исследования [11, 19] показали, что при анализе случайных процессов часто встречаются затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные корреляционные функции.

Например, экспоненциальная модель корреляционной функции оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки интервала корреляции и т. д. Подобные задачи возникают при создании информационно-измерительных систем, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени, постоянные времени сглаживающих устройств при получении оценок сигнала. Часто данная модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик реальных объектов, так как существует большой класс динамических систем, для которых процессы с экспоненциальной корреляционной функцией являются наихудшими с точки зрения помехозащищенности. Кроме того, при теоретических исследованиях часто делается допущение о том, что анализируемый случайный процесс является марковским [5 стр. 537].

В качестве критерия приближения, как правило, применяют точностные критерии [14]:

- минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \beta_0, \dots, \beta_m)]^2 d\tau = \min; \quad (1.40)$$

- минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \beta_0, \dots, \beta_m)]^2 e^{-\frac{\tau}{T_k}} d\tau = \min; \quad (1.41)$$

- критерий равномерного приближения:

$$|K_x(\tau) - K_a(\tau, \beta_0, \dots, \beta_m)| < \varepsilon. \quad (1.42)$$

При этом наиболее часто применяют минимум квадратической погрешности приближения.

1.3. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями

Аппроксимация корреляционных функций в этом случае производится путем разложения в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = A_m \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha), \quad (1.43)$$

где β_k – коэффициент ряда Фурье;

A_m – значение КФ в точке максимума;

$\psi_k(\tau, \alpha)$ – семейство базисных функций, ортогональных на интервале $[0, \infty)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \cdot \psi_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, \text{при } k \neq n; \\ \|\psi_k\|^2, \text{при } k = n, \end{cases} \quad (1.44)$$

где $\|\psi_k\|^2$ – весовая функция ортогонального базиса.

Выберем в качестве критерия приближения критерий минимума квадратической погрешности аппроксимации (1.40):

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min. \quad (1.45)$$

Для того, чтобы найти минимальное значение квадратической погрешности (1.45), необходимо определить частную производную $\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_n} = 0$ при $n = 0..k$.

Так как ряд сходится в интервале $[0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с [14] определяются выражением:

$$\beta_k = \frac{1}{A_m \|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (1.46)$$

где $K_x(\tau)$ – оцениваемая КФ.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом m членов ряда (1.43). В таком случае получается приближенное значение функции корреляции:

$$\hat{K}_x(\tau) = A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha), \quad (1.47)$$

но при этом возникает методическая погрешность аппроксимации.

Определим погрешность, вызванную конечным числом членов ряда:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.48)$$

На основе формул (1.46) и (1.47) проектируются алгоритмы аппроксимации, причем в качестве базисных функций могут быть применены функции Лагерра, Лежандра, Дирихле, Чебышева, Эрмита, Хаара, Уолша и др. Наиболее часто применяются ортогональные функции Лагерра [7, 13], другие базисы рассматриваются редко. Целью данной работы явилось стремление сравнить базисы ортогональных функций Лежандра и Дирихле с базисом функций Лагерра, и выработать рекомендации по применению того или иного ортогонального базиса.

Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от физической реализуемости, возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, простоты определения других функционально связанных характеристик (например, спектральная плотность мощности), удобством в работе.

Системы ортогональных функций

Таблица 1.2

Система ортогональных функций	Аналитическое выражение $\psi_k(\tau, \alpha)$	Норма $\ \psi_k\ ^2$	Значение в нуле $\psi_k(0, \alpha)$
Лагерра	$Lag_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!(-\alpha\tau)^s}{(k-s)!(s!)^2} \cdot e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}$	1
Лежандра	$Leg_k(\tau, \alpha) = \exp(-\alpha\tau)P_k[1 - 2\exp(-2\alpha\tau)]$, где $P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^{k \text{ div } 2} (-1)^s \frac{(2k-2s)!}{s!(k-s)!(k-2s)!} x^{k-2s}$ – ортогональные полиномы Лежандра	$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (2k+1)}$	$(-1)^k$
Дирихле	$Drh_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \cdot e^{-(s+1)\alpha\tau} \cdot \prod_{i=0}^{s-1} \frac{2(2 \cdot i + 3)}{i+2} \cdot \prod_{j=s+1}^k \frac{s+j+1}{j-s}$. Замечание: $\prod_{i=a}^b f(i) = 1$, если $a > b$	$\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (k+1)}$	1

Для определения значений ортогональных функций могут использоваться рекурсивные алгоритмы (см. таблицу 1.3). Они обладают лучшими временными характеристиками по сравнению с алгоритмами таблицы 1.2 и позволяют избежать ошибок, связанных с переполнением. Накопление ошибок удастся устранить посредством использования переменных двойной точности.

Рекуррентные формулы

Таблица 1.3

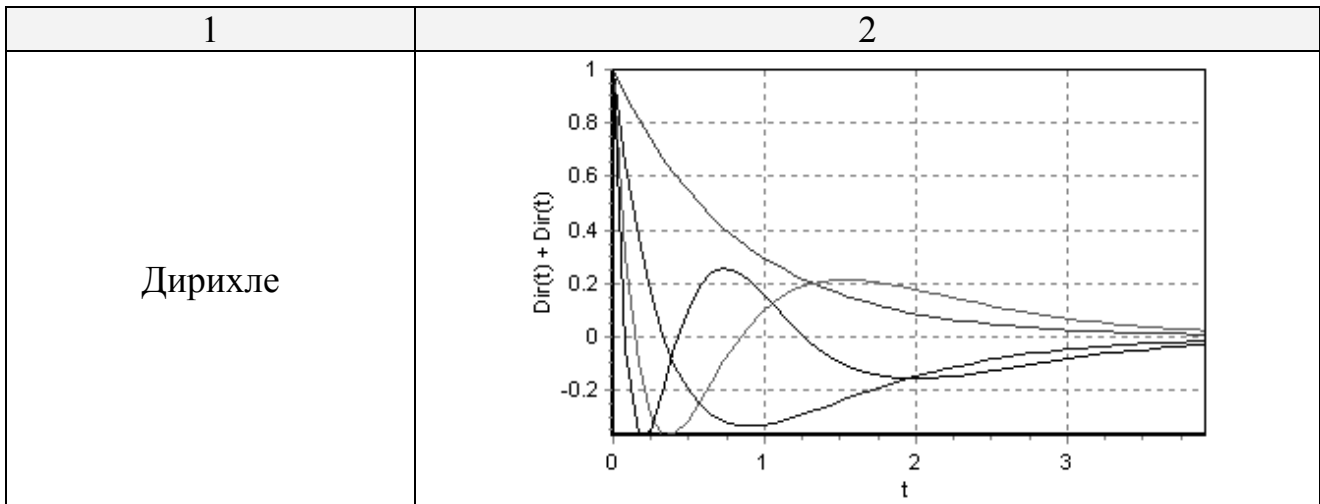
Система ортогональных функций	Рекуррентное соотношение
1	2
Лагерра	$Lag_0(\tau, \alpha) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}};$ $Lag_1(\tau, \alpha) = e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}(1 - \alpha\tau);$ $Lag_k(\tau, \alpha) = \frac{2k-1-\alpha\tau}{k} \cdot Lag_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} \cdot Lag_{k-2}(\tau, \alpha)$

1	2
Лежандра	$Leg_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau};$ $Leg_1(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} - 2e^{-3\alpha\tau};$ $Leg_k(\tau, \alpha) = \frac{2k-1}{k} \cdot (1 - 2e^{-2\alpha\tau}) \cdot Leg_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k} \cdot Leg_{k-2}(\tau, \alpha)$
Дирихле	$Drh_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau};$ $Drh_1(\tau, \alpha) = 3e^{-2\alpha\tau} - 2e^{-\alpha\tau};$ $Drh_k(\tau, \alpha) = \frac{2k+1}{k+1} \cdot \left[\left(2e^{-\alpha\tau} - \frac{4k^2}{4k^2-1} \right) Drh_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{2k-1} Drh_{k-2}(\tau, \alpha) \right]$

Вид ортогональных функций приведен в таблице:

Таблица 1.4

Ортогональный базис	Вид ортогональных функций начальных порядков
1	2
Лагерра	
Лежандра	



1.4. Коэффициенты разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций

Использование параметрических методов, к которым относится аппроксимация КФ ортогональными функциями, подразумевает наличие некоторой математической модели анализируемого случайного процесса. Корреляционный анализ сводится в данном случае к решению оптимизационной задачи, то есть поиску таких параметров модели, при которых она наиболее близка к реально наблюдаемому сигналу.

Данный метод корреляционного анализа сводится к определению параметра масштаба ортогональных функций, коэффициентов модели β_k заданного порядка n . Определение коэффициентов производится из условия минимизации дисперсии (или среднеквадратического значения) погрешности приближения, а также правильности оценки модельных корреляционных функций.

Далее приводятся зависимости, позволяющие определять коэффициенты аппроксимирующего выражения для различных ортогональных базисов.

Лагерра:

Для определения выражений коэффициентов разложения для типовых моделей нормированных корреляционных функций, представленных в таблице 1.5, необходимо ввести следующие обозначения:

$$\varphi_{i1} = \arctg \left(\frac{\omega}{\lambda_i + \frac{\alpha}{2}} \right); \varphi_{i2} = \arctg \left(\frac{\omega}{\lambda_i - \frac{\alpha}{2}} \right); \quad (1.49)$$

$$B_{ik} = \frac{\alpha}{2\lambda_i + \alpha} \left(\frac{2\lambda_i - \alpha}{2\lambda_i + \alpha} \right)^k \left(\frac{\cos(\varphi_{i1})}{\cos(\varphi_{i2})} \right)^k. \quad (1.50)$$

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей (базис Лагерра)

Таблица 1.5

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	β_k
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{\alpha}{\lambda_1 + \alpha/2} \left(\frac{\lambda_1 - \alpha/2}{\lambda_1 + \alpha/2} \right)^k$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\frac{\alpha}{\lambda_2 + \alpha/2} \left(\frac{\lambda_2 - \alpha/2}{\lambda_2 + \alpha/2} \right)^{k-1} \left(\frac{\lambda_2 - \alpha/2}{\lambda_2 + \alpha/2} \cdot \frac{2\lambda_2 + \alpha/2}{\lambda_2 + \alpha/2} - \frac{k\alpha\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha/2} \right)$
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\frac{\alpha^2/2}{(\lambda_3 + \alpha/2)^2} \left(\frac{\lambda_3 - \alpha/2}{\lambda_3 + \alpha/2} \right)^{k-1} \left(\frac{\lambda_3 - \alpha/2}{\lambda_3 + \alpha/2} + \frac{2k\lambda_3}{\lambda_3 + \alpha/2} \right)$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3} \right)$	$\frac{4\alpha \cdot (2\lambda_4 - \alpha)^{k-2}}{3 \cdot (2\lambda_4 + \alpha)^{k+3}} \left[\alpha\lambda_4(3\alpha^2 - 28\lambda_4^2) \cdot (1 + 2k) + \right.$ $\left. + 2\alpha^2\lambda_4^2(4k(k+1) - 7) + 64\lambda_4^4 + \frac{3\alpha^4}{2} \right]$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$2B_{5k} \cos(\varphi_{51}) \cos(k\varphi_{52} - (k+1)\varphi_{51})$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$2B_{6k} \cos(\varphi_{61}) \left(\cos(k\varphi_{62} - (k+1)\varphi_{61}) - \frac{\lambda_6}{\omega} \sin(k\varphi_{62} - (k+1)\varphi_{61}) \right)$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$	$2B_{7k} \cos(\varphi_{71}) \left(\cos(k\varphi_{72} - (k+1)\varphi_{71}) + \frac{\lambda_7}{\omega} \sin(k\varphi_{72} - (k+1)\varphi_{71}) \right)$

Лежандра:

Чтобы найти выражение оценки коэффициентов разложения для типовых моделей нормированных корреляционных функций, введем обозначение:

$$A_{k,s} = (-1)^s \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2}. \quad (1.51)$$

Выражения для оценки коэффициентов разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций приведены в таблице 1.6.

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей (базис Лежандра)

Таблица 1.6

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	β_k
1	2	3
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1}{(2s+1)\alpha + \lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha + 2\lambda_2}{((2s+1)\alpha + \lambda_2)^2}$

1	2	3
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha}{((2s+1)\alpha + \lambda_3)^2}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{8\lambda_4^2 + 9\lambda_4(2s+1)\alpha + 3(2s+1)^2 \alpha^2}{3((2s+1)\alpha + \lambda_4)^3}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha + \lambda_5}{((2s+1)\alpha + \lambda_5)^2 + \omega_{0,5}^2}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha + 2\lambda_6}{((2s+1)\alpha + \lambda_6)^2 + \omega_{0,6}^2}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(2s+1)\alpha}{((2s+1)\alpha + \lambda_7)^2 + \omega_{0,7}^2}$

Дирихле:

Чтобы найти выражения для оценки коэффициентов разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций, введем обозначение:

$$A_{k,s} = (-1)^{k-s} \frac{(k+s+1)!}{(k-s)!(s+1)!s!}. \quad (1.52)$$

Выражения для оценки коэффициентов разложения типовых моделей нормированных корреляционных функций приведены в таблице 1.7.

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей (базис Дирихле)

Таблица 1.7

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	β_k
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1}{(s+1)\alpha + \lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha + 2\lambda_2}{((s+1)\alpha + \lambda_2)^2}$
3	$e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha}{((s+1)\alpha + \lambda_3)^2}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3} \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{8\lambda_4^2 + 9\lambda_4(s+1)\alpha + 3(s+1)^2 \alpha^2}{3((s+1)\alpha + \lambda_4)^3}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha + \lambda_5}{((s+1)\alpha + \lambda_5)^2 + \omega_{0,5}^2}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau } \left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha + 2\lambda_6}{((s+1)\alpha + \lambda_6)^2 + \omega_{0,6}^2}$

7	$e^{-\lambda_7 \tau } \left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau) \right)$	$\ \psi_k\ ^2 \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{(s+1)\alpha}{((s+1)\alpha + \lambda_7)^2 + \omega_{0,7}^2}$
---	--	--

Определим погрешность аппроксимации различными ортогональными функциями, вызванную конечным числом членов ряда, при этом в выражении (1.48) используется величина нормы $\|\psi_k\|^2$, а также выражения (1.46) и (1.44). Полученные значения погрешности аппроксимации различными ортогональными функциями приведены в таблице 1.8.

Погрешность аппроксимации ортогональными функциями

Таблица 1.8

Ортогональный базис	Погрешность ограниченного числа членов Δ
Лагерра	$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$
Лежандра	$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$
Дирихле	$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$

1.5. Алгоритм оценки параметра масштаба ортогональных функций

Для построения модели КФ необходимо определить: число членов аппроксимирующего ряда; коэффициенты разложения ортогонального ряда – β_k ; параметр масштаба – α .

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ПЭВМ заключается в «дискретизации» полученных ранее уравнений, выборе численного метода для их решения, написании и отладке соответствующего программного обеспечения и проведении счета.

При этом при вычислении определенного интеграла, что требуется при определении коэффициентов β_k , используют формулы численного интегрирования. В результате анализа различных формул было обнаружено, что, при использовании метода прямоугольников и метода трапеций для вычисления интеграла, расхождение между теоретическими значениями и определенными по формуле (1.46) – существенно. Более точный результат при решении дает формула Симпсона [6]

$$J = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]. \quad (1.53)$$

Определив β_k для обеспечения минимальной погрешности аппроксимации (таблица 1.8) в виде (1.46), необходимо решить вопрос об определении значения параметра α , обеспечивающего минимальную (допустимую) погрешность аппроксимации. Для ортогональных функций Лагерра эта задача решена.

В книге [14] рассматриваются различные алгоритмы решения этой задачи для случая аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, приводится сравнительный анализ алгоритмов. Показано, что с точки зрения минимизации вычислительных затрат, обеспечения допустимых погрешностей аппроксимации и обеспечения лучшей сходимости наиболее целесообразно выбирать алгоритм, при котором вводится ограничение $\beta_0 = \sigma_x^2$. Параметр α , определенный по этому алгоритму, находится вблизи оптимального значения α_{opt} и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным значениям.

Для однозначного решения задачи, т.е. определения единственного корня, обеспечивающего погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-минимуму, необходимо анализировать сигнал, пропорциональный β_0 [14].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_0(\tau, \alpha) d\tau - k\sigma_x^2 = 0, \quad (1.54)$$

где $\psi_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau/2}$ – функция Лагерра нулевого порядка;

k – постоянная величина, которая, как видно из уравнения, меньше 2.

Для модели $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos(\omega_{0,5}\tau)$ это уравнение приведем к виду:

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau/2} e^{-\lambda_s\tau} \cos(\omega_{0,5}\tau) \cdot d\tau - k = 0. \quad (1.55)$$

Разрешив уравнение относительно α , получим:

$$\alpha = 2 \frac{-\lambda_s(1-k) + \sqrt{\lambda_s^2(1-k)^2 + k(2-k)(\lambda_s^2 + \omega_{0,5}^2)}}{2-k}. \quad (1.56)$$

При $k=1$ выражение примет самый простой вид, а именно:

$$\alpha = 2\sqrt{\lambda_s^2 + \omega_{0,5}^2}. \quad (1.57)$$

Заметим, что зависимость параметра α от параметров корреляционной функции в выражении (1.57) совпадает с выражением, полученным в [19] для условия минимума погрешности в равномерном смысле. Однако в [19] приведен лишь результат, а не алгоритм поиска параметра α , алгоритм приводится в [14].

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации (1.92) зависит от величины параметра масштаба, вида корреляционной функции

и ее показателя колебательности $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$, числа членов разложения ряда m . В

таблице 1.9 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,5}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos(\omega_{0,5}\tau)$ при разных значениях m , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю затухания исследуемых корреляционных функций –

$$\chi_5 = \frac{\alpha}{\lambda_s}.$$

Методическая погрешность аппроксимации

Таблица 1.9

Ортогональный базис	График методической погрешности ($\mu_5=3,4,5; m=2$)	График методической погрешности ($\mu_5=5; m=3,4,5$)
Лагерра		
Лежандра		
Дирихле		

Видно, что при выбранной модели корреляционной функции, $\mu = const$, $m = const$, погрешность существенным образом зависит от χ , т.е. α . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от m [15]. Следует отметить, что исследователя интересует значение па-

раметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Приведенный в книге [14] метод аппаратурной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций.

Импульсная характеристика ортогонального фильтра k -ого порядка имеет вид:

$$H_k(\tau) = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \psi_k(\tau, \alpha). \quad (1.58)$$

Частотная характеристика фильтра k -ого порядка семейства ортогональных функций определяется по формуле прямого преобразования Фурье:

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} H_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.59)$$

Частотные характеристики для ортогональных функций Лагерра, Лежандра и Дирихле приведены в таблице 1.10.

Частотные характеристики ортогональных функций

Таблица 1.10

Ортогональный базис	Частотная характеристика
Лагерра	$W_k(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{j\omega - \frac{\alpha}{2}}{j\omega + \frac{\alpha}{2}} \right)^k = \left(\frac{j\omega - \frac{\alpha}{2}}{j\omega + \frac{\alpha}{2}} \right) W_{k-1}(j\omega);$ $W_0(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \frac{\alpha}{2}}$
Лежандра	$W_k(j\omega) = \frac{(2k+1)\alpha}{j\omega + (2k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{(2n+1)\alpha - j\omega}{j\omega + (2n+1)\alpha}$
Дирихле	$W_k(j\omega) = \frac{(k+1)\alpha}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{j\omega - (n+1)\alpha}{j\omega + (n+1)\alpha}$

Введем понятие полосы пропускания линейной динамической системы [13]:

$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega}{|W_m(j\omega)|_{\max}^2}, \quad (1.60)$$

где $W_m(j\omega)$ – частотная характеристика семейства ортогональных функций;
 $|W_m(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных функций.

При этом квадрат модуля частотной характеристики определяется по формуле:

$$|W_m(j\omega)|^2 = W_m(j\omega) \cdot W_m(-j\omega). \quad (1.61)$$

Графически полоса пропускания показана на рисунке 1.7.

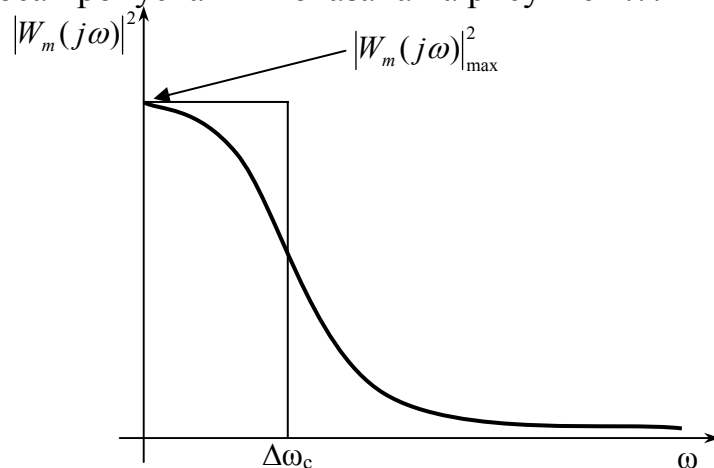


Рисунок 1.7. Полоса пропускания линейной динамической системы

Очевидно, квадрат модуля частотной характеристики примет максимальное значение при $\omega = 0$.

Квадраты модулей частотных характеристик Лагерра, Лежандра и Дирихле, а также максимумы частотных характеристик приведены в таблице 1.11.

Квадраты модулей частотных характеристик и их максимумы

Таблица 1.11

Ортогональный базис	$ W_m(j\omega) ^2$	$ W_m(j\omega) _{\max}^2$
Лагерра	$\frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2}$	4
Лежандра	$\frac{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	1
Дирихле	$\frac{(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	1

Чтобы определить полосу пропускания линейной динамической системы, необходимо определить значение интеграла $\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega$. Далее представлены выражения для определения значений интегралов в различных ортогональных базисах.

Лагерра:

$$\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2} d\omega = \pi\alpha. \quad (1.62)$$

Лежандра:

$$\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}. \quad (1.63)$$

Дирихле:

$$\int_0^{\infty} |W_m(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi\alpha(m+1)}{2}. \quad (1.64)$$

Значения полосы пропускания линейной динамической системы для различных ортогональных функций, вычисленные на основе формул (1.60), (1.62), (1.63), (1.64) и содержимого таблицы 1.11, приведены в таблице 1.12.

Таблица 1.12

Ортогональный базис	$\Delta\omega_c$
Лагерра	$\frac{\pi\alpha}{4}$
Лежандра	$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2}$
Дирихле	$\frac{\pi\alpha(m+1)}{2}$

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_c$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. В книге [12] доказывается, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса. Введем соотношение неопределенности:

$$\Delta\omega_c \cdot \tau_u^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (1.65)$$

где $\tau_u^{(2)}$ – длительность импульсной характеристики линейной динамической системы.

$$\tau_{uk}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} H_k(\tau) d\tau}{H_k(\tau)_{\max}}. \quad (1.66)$$

Учитывая, что длительность импульсной характеристики фильтров нижних частот, к которым относятся ортогональные фильтры, с погрешностью $\delta = 0,02$ равна $\frac{\Delta\tau}{0.4}$, соотношение неопределенности примет вид:

$$\Delta\omega_c = \frac{0,4 \cdot \pi}{2 \cdot \Delta\tau} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau}. \quad (1.67)$$

Определим значение параметра масштаба для различных ортогональных базисов (при определении параметра используется содержимое таблицы 1.12 и формула 1.67) при $k = m$.

Лагерра:

$$\frac{\pi\alpha}{4} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{0,8}{\Delta\tau}. \quad (1.68)$$

Лежандра:

$$\frac{\pi\alpha(2m+1)}{2} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{0,4}{\Delta\tau(2m+1)}. \quad (1.69)$$

Дирихле:

$$\frac{\pi\alpha(m+1)}{2} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\Delta\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{0,4}{\Delta\tau(m+1)}. \quad (1.70)$$

Значения параметров масштаба ортогональных функций сведены в таблицу 1.13.

Параметр масштаба ортогональных функций

Таблица 1.13

Система ортогональных функций	α
Лагерра	$\frac{0,8}{\Delta\tau}$
Лежандра	$\frac{0,4}{\Delta\tau(2m+1)}$
Дирихле	$\frac{0,4}{\Delta\tau(m+1)}$

1.6. Анализ составляющих методической погрешности оценки коэффициентов разложения

На практике приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения корреляционной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{I}{A_m \|\psi_k\|^2} \int_0^{\tau_m} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau) d\tau. \quad (1.71)$$

При этом появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{I}{A_m \|\psi_k\|^2} \int_{\tau_m}^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau) d\tau. \quad (1.72)$$

Необходимо отметить, что $\lim_{\tau_m \rightarrow \infty} \Delta_{\beta_k}^{(1)} = 0$.

Также на точность вычисления коэффициентов разложения влияет тот факт, что интегрирование производится численными методами:

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi\left(\hat{K}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta\tau \cdot i), \tau_m\right), \quad (1.73)$$

где $i = 1..M$;

$$M = \text{ent}\left[\frac{\tau_m}{\Delta\tau}\right];$$

τ_m – интервал корреляции;

$\Delta\tau$ – шаг дискретизации.

Таким образом, возникает составляющая методической погрешности:

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (1.74)$$

В связи с конечностью выборки значений КФ, возникает еще одно ограничение:

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi\left(\hat{K}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta\tau \cdot i), \tau_m, N\right), \quad (1.75)$$

где $i = 1..M$;

N – объем выборки.

Соответственно:

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (1.76)$$

Следовательно, методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения β_k определяется выражением:

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k. \quad (1.77)$$

Обозначив $\hat{\beta}_k^{(3)}$ через $\hat{\beta}_k$, формула (1.77) примет вид:

$$\Delta_{\beta_k} = \hat{\beta}_k - \beta_k. \quad (1.78)$$

Конечность интервала корреляции КФ и интегрирование численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки значений КФ – случайную составляющую.

Необходимо отметить, что для типовых моделей КФ при различных значениях Δ (1.131), в частности, когда аппроксимация производится с помощью ортогональных функций Лагерра, Лежандра или Дирихле, погрешность определения коэффициентов разложения Δ_{β_k} возрастает с увеличением порядка k (рисунки 1.8, 1.9, 1.10).

В свою очередь, коэффициенты разложения β_k должны обеспечивать минимум квадратической погрешности аппроксимации [13].

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left(K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau) \right)^2 d\tau = \min, \quad (1.79)$$

которая при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю (рисунок 1.11).

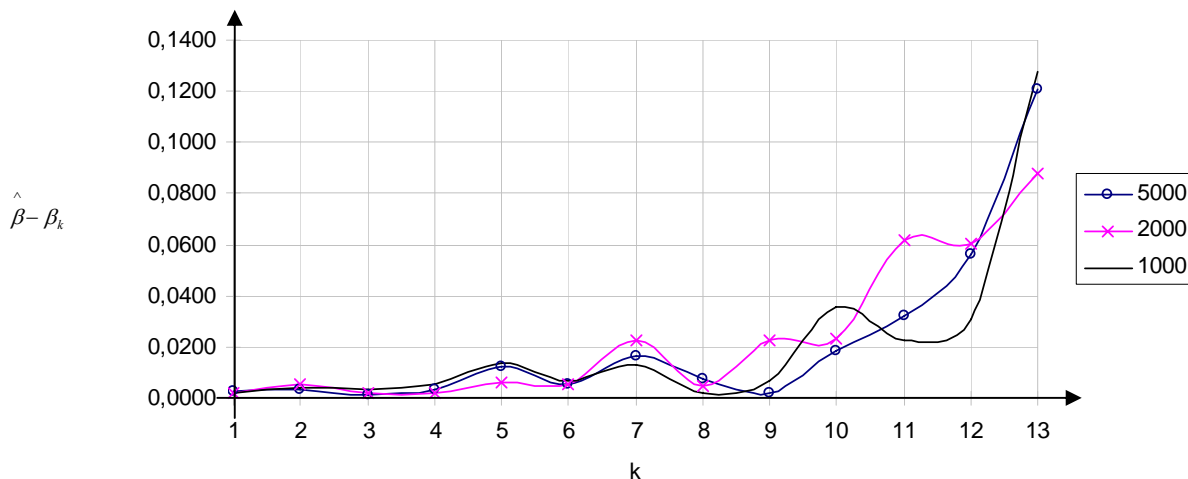


Рисунок 1.8. Отклонение оценок (Лагерра, $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$)

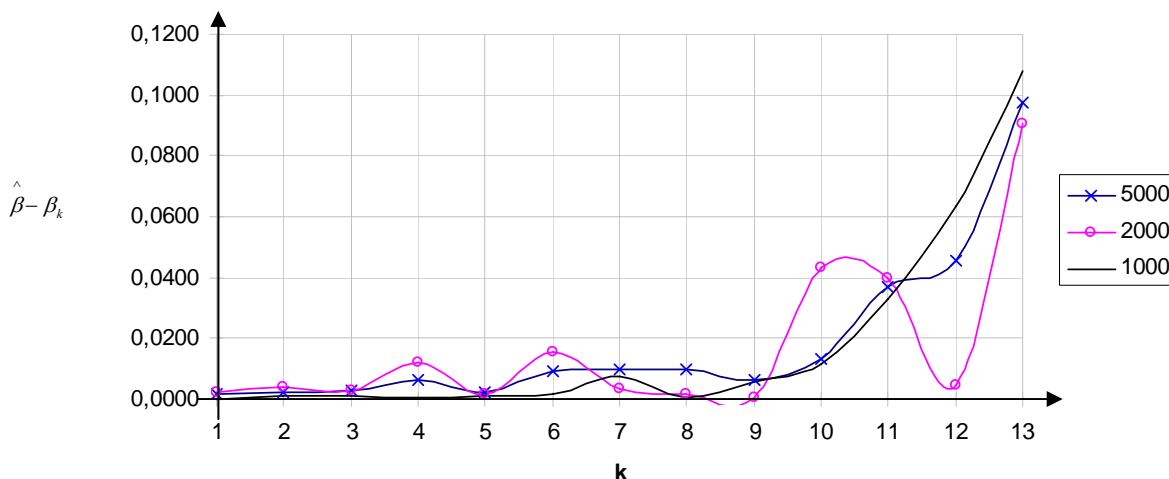


Рисунок 1.9. Отклонение оценок (Лежандра, $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$)

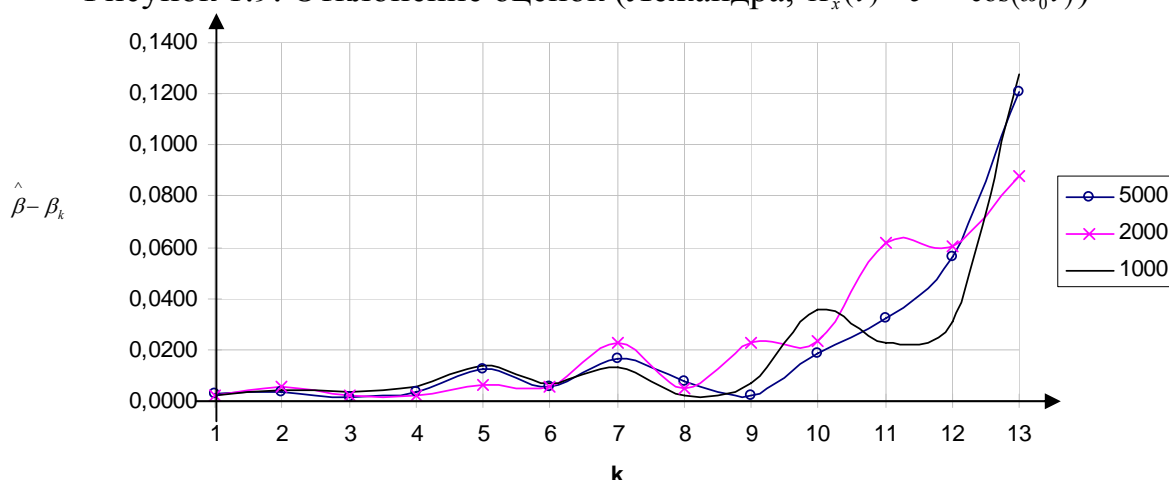


Рисунок 1.10. Отклонение оценок (Дирихле, $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$)

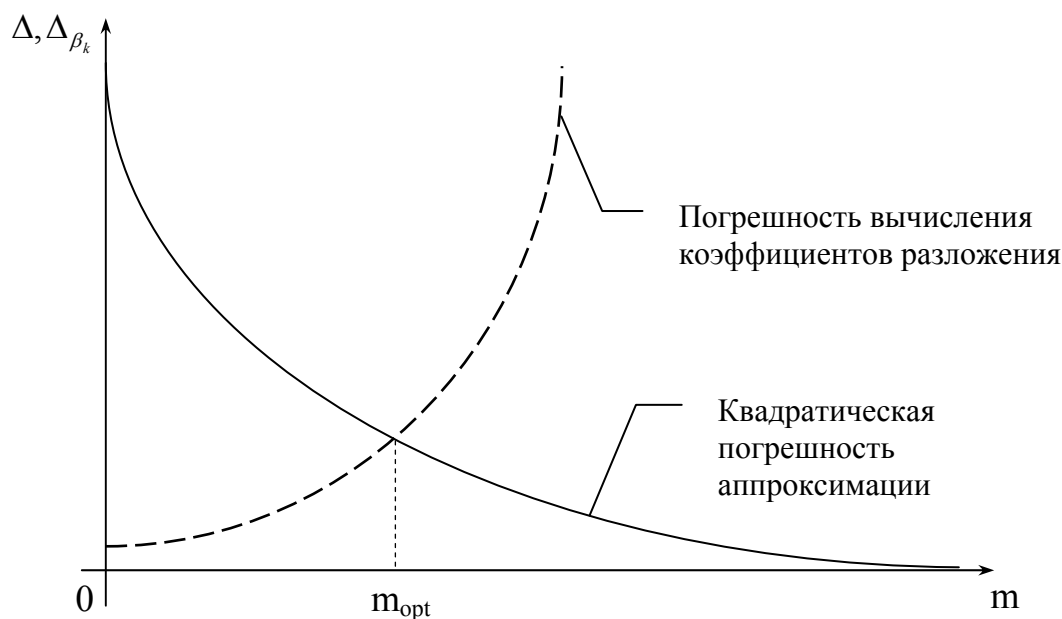


Рисунок 1.11. Оптимальное число членов разложения ряда

Из рисунка 1.11 видно, что существует оптимальное число членов разложения m_{opt} , при котором результирующая погрешность аппроксимации, включающая квадратическую погрешность аппроксимации и погрешность вычисления коэффициентов разложения, минимальна.

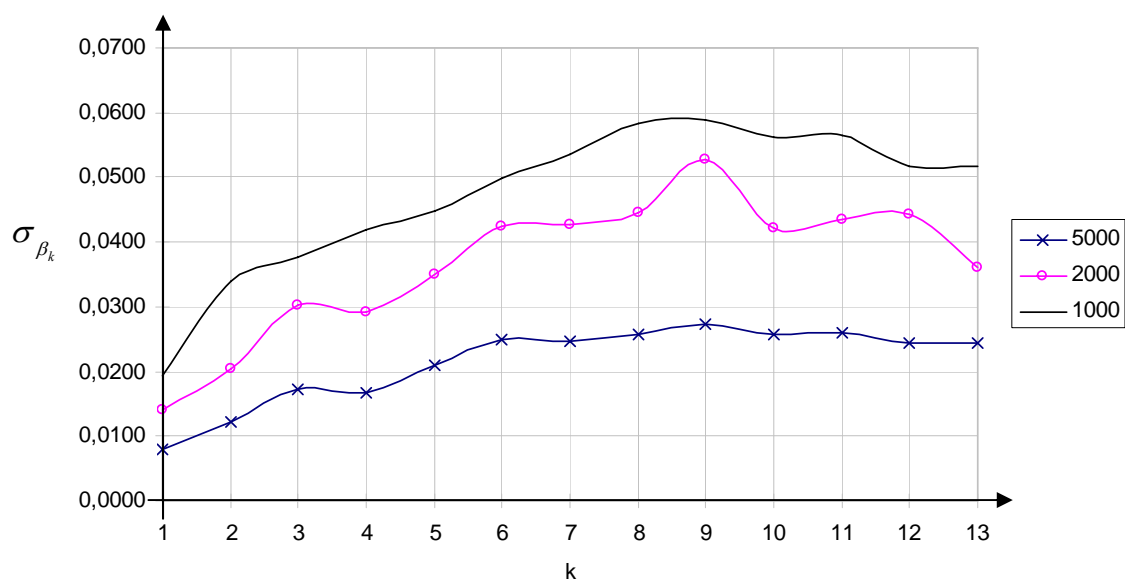


Рисунок 1.12. Среднее квадратическое отклонение оценок (Лагерра)

На рисунках 1.12, 1.13 и 1.14 приведены графики зависимостей среднего квадратического отклонения $\hat{\beta}_k$ от порядка k , при аппроксимации корреляционной функции вида $K_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0\tau)$, в случаях, когда объем выборки значений КФ $N = 5000, N = 2000, N = 1000$.