

Рисунок 1.13. Среднее квадратическое отклонение оценок (Лежандра)

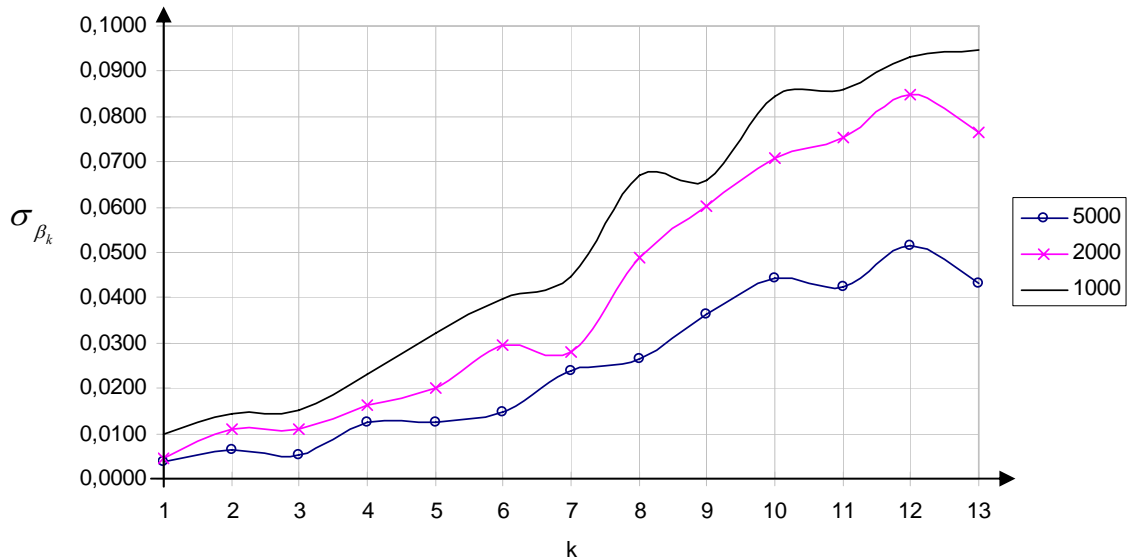


Рисунок 1.14. Среднее квадратическое отклонение оценок (Дирихле)

Среднее квадратическое отклонение  $\hat{\beta}_k$  при аппроксимации функциями Дирихле и Лежандра (рисунок 1.12, 1.13) с увеличением порядка  $k$  возрастает. В случае же аппроксимации ортогональными функциями Лагерра СКО  $\hat{\beta}_k$  стремится к определенному значению, когда порядок  $k$  возрастает. Достаточно четко это свойство выражается при увеличении объема выборки (рисунок 1.14,  $N = 5000$ ).

Для ответа на вопрос: насколько же велика погрешность определения коэффициентов разложения, необходимо определить ее математическое ожидание, а также среднее квадратическое отклонение. Для чего квадратическую погрешность аппроксимации (1.79) можно записать в виде:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.80)$$

Учитывая (1.78), выражение (1.80) примет вид:

$$\Delta = \Delta_{\min} + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \Delta_{\beta_k}^2. \quad (1.81)$$

Математическое ожидание погрешности в этом случае будет определяться следующим образом:

$$M[\Delta] = \Delta_{\min} + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}^2], \quad (1.82)$$

$$\overset{\circ}{\Delta} = A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]). \quad (1.83)$$

Тогда

$$\overset{\circ}{\Delta}^2 = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]) \cdot \sum_{n=0}^m \|\psi_n\|^2 (\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2]), \quad (1.84)$$

$$M[\overset{\circ}{\Delta}^2] = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 M[(\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])^2] + \\ + 2A_m^4 \sum_{n \neq k} \|\psi_n\|^2 \|\psi_k\|^2 M[(\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])(\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2])]. \quad (1.85)$$

Обозначив:

$$J_1 = (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])^2; \quad (1.86)$$

$$J_2 = (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2])(\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2]), \quad (1.87)$$

выражение (1.85) примет вид:

$$M[\overset{\circ}{\Delta}^2] = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_n\|^4 M[J_1] + 2A_m^4 \sum_{k \neq n} \|\psi_n\|^2 \|\psi_k\|^2 M[J_2], \quad (1.88)$$

где

$$M[J_1] = M[\Delta_{\beta_k}^4] - (M[\Delta_{\beta_k}^2])^2, \quad (1.89)$$

считая  $\hat{\beta}_k$  и  $\hat{\beta}_n$  некоррелированными:

$$M[J_2] = 0. \quad (1.90)$$

Таким образом,

$$\sigma_{\Delta}^2 = A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_n\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^4] - (M[\Delta_{\beta_k}^2])^2). \quad (1.91)$$

Величина относительной методической погрешности определяется по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\int_0^{\infty} [K_x^*(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)]^2 d\tau}{\int_0^{\infty} [K_x^*(\tau)]^2 d\tau}. \quad (1.92)$$

Учитывая (1.48), выражение (1.92) преобразуем к виду:

$$\delta^2 = 1 - \frac{A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2}{\int_0^{\infty} [K_x^*(\tau)]^2 d\tau}. \quad (1.93)$$

Из (1.48) и (1.92) следует, что при аппроксимации КФ ортогональными функциями для определения погрешности необходимо определить значения коэффициентов Фурье (1.46), которые, в свою очередь, зависят от параметра масштаба  $\alpha$ .

### 1.7. Аппроксимация корреляционных функций ортогональными функциями при ограничениях на ее модель

В общем случае, рассмотренное нами семейство ортогональных функций  $\psi_k(\tau, \alpha)$  не выполняет основного свойства, присущего КФ, а именно  $[K_x(0) = \sigma_x^2]$ , т.е. имеет место зависимость:

$$K_x(0) = A_m \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \neq \sigma_x^2. \quad (1.94)$$

Поэтому для выполнения основного свойства решают систему уравнений [14]:

$$\begin{cases} K_x(0) = A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \sigma_x^2; \\ \Delta_1 = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)]^2 d\tau + \lambda \cdot A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min. \end{cases} \quad (1.95)$$

Найдем частные производные  $\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_k}$  и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} &= -2 \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \cdot A_m \psi_n(0, \alpha) = 0; \\ -2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + 2 A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \cdot \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \cdot A_m \psi_n(0, \alpha) &= 0; \\ -2 \beta_n A_m \|\psi_n\|^2 + 2 A_m b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \cdot A_m \psi_n(0, \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Отсюда

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda \cdot \psi_n(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2}. \quad (1.97)$$

Подставляя найденное значение  $b_n$  в выражение (1.94), получим:

$$\begin{aligned} A_m \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k - \frac{\lambda \cdot \psi_k(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2} \right] \cdot \psi_k(0, \alpha) &= \sigma_x^2; \\ A_m \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) - \frac{\lambda \cdot \psi_k^2(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2} \right] &= \sigma_x^2; \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}}.$$

Окончательно формула для определения коэффициентов разложения при ограничениях на модель корреляционной функции выглядит так:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}. \quad (1.99)$$

Определим значения  $b_n$  для различных ортогональных базисов.

**Лагерра:**

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{\sum_{k=0}^m \alpha} \cdot \alpha = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}. \quad (1.100)$$

**Лежандра:**

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{\sum_{k=0}^m 2\alpha(2k+1)} \cdot (-1)^n \cdot 2\alpha(2n+1). \quad (1.101)$$

Учитывая приложение 1, получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1). \quad (1.102)$$

**Дирихле:**

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{\sum_{k=0}^m 2\alpha(k+1)} \cdot 2\alpha(n+1). \quad (1.103)$$

Учитывая приложение 1, получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{2(n+1)\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}. \quad (1.104)$$

Выражения для определения коэффициентов ряда Фурье сведем в таблицу 1.14.

Значения коэффициентов при ограничениях на модель  
корреляционной функции

Таблица 1.14

Ортогональный базис	Коэффициенты ряда Фурье $b_k$
Лагерра	$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}$
Лежандра	$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1)$
Дирихле	$b_n = \beta_n + \frac{2(n+1)\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}$

Если в качестве критерия приближения выбрать критерий минимума квадратической погрешности (1.40), то погрешность аппроксимации, вызванная ограничением на модель корреляционной функции, оценивается по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m \sum_{k=0}^m b_k \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \sum_{l=0}^m b_l \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \cdot \psi_l(\tau, \alpha) d\tau = \quad (1.105) \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2. \end{aligned}$$

Оценим значения погрешности аппроксимации для различных ортогональных базисов. Для этого в формулу (1.105) подставим значение нормы ортогональной функции (таблица 1.2) и значения коэффициентов ряда Фурье (таблица 1.14).

### Погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Для того, чтобы упростить определение величины погрешности по формуле (1.105), вычислим входящие в нее слагаемые отдельно:

1) второе слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лагерра:

$$\sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 = \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} \right] \cdot \frac{\beta_k}{\alpha} = \quad (1.106)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)}.$$

2) третье слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лагерра:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)^2}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, подставим значения, вычисленные по выражениям (1.106) и (1.107) в (1.105):

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} \right] + \\ &+ A_m^2 \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)}{(m+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)^2} \right] = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

## Погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Лежандра

Для того, чтобы упростить определение величины погрешности по формуле (1.105), вычислим входящие в нее слагаемые отдельно:

1) второе слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лежандра:

$$\sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 = \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^k \cdot (2k+1) \right] \cdot \frac{\beta_k}{2 \cdot \alpha \cdot (2k+1)} = \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k \cdot (2k+1)}{(2k+1) \cdot (m+1)^2} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2}.
\end{aligned}$$

2) третье слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Лежандра:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k + \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k \cdot (2k+1)}{(m+1)^2} \right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (2k+1)} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k \cdot (2k+1)}{(2k+1) \cdot (m+1)^2} + \\
&\quad + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2 \cdot (-1)^{2k} \cdot (2k+1)^2}{(2k+1) \cdot (m+1)^4} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2}.
\end{aligned} \tag{1.110}$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Лежандра подставим значения, вычисленные по выражениям (1.109) и (1.110), в (1.105):

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 = \\
&= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left[ \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} \right] + \\
&\quad + A_m^2 \left[ \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right) \cdot (-1)^k}{(m+1)^2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2} \right] = \\
&= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)} + \frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2}.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

## Погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями Дирихле

Для того, чтобы упростить определение величины погрешности по формуле (1.105), вычислим входящие в нее слагаемые отдельно:

1) второе слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Дирихле:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k + \frac{2 \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} \cdot (k+1) \right] \cdot \frac{\beta_k}{2 \cdot \alpha \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1) \cdot (m+2)}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

2) третье слагаемое выражения (1.105) для аппроксимации ортогональными функциями Дирихле:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 &= \sum_{k=0}^m \left[ \beta_k + \frac{2 \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} \cdot (k+1) \right]^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot 2 \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right) \cdot (k+1)}{(k+1) \cdot (m+1) \cdot (m+2)} + \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{4 \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)^2 \cdot (k+1)^2}{(k+1) \cdot (m+1)^2 \cdot (m+2)^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{\alpha} \frac{\left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)^2}{(m+1)(m+2)}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение погрешности аппроксимации ортогональными функциями Дирихле, подставим значения, вычисленные по выражениям (1.112) и (1.113) в (1.105):

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k \cdot \beta_k \cdot \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m b_k^2 \cdot \|\psi_k\|^2 = \\ &= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left[ \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1) \cdot (m+2)} \right] + \\ &\quad + A_m^2 \left[ \frac{1}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k \cdot \left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{\alpha} \frac{\left( 1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \right)^2}{(m+1)(m+2)} \right] = \end{aligned} \quad (1.114)$$



$$= \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)} + \frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)(m+2)}.$$

Погрешность аппроксимации ортогональными функциями  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$  можно разделить на две части  $\Delta_1$  (см. таблицу 1.8) и  $\Delta_2$ . Где  $\Delta_1$  – погрешность аппроксимации, вызванная конечным числом членов ряда Фурье,  $\Delta_2$  – погрешность аппроксимации, вызванная дополнительным ограничением, обеспечивающим выполнение основного свойства КФ. Значения погрешности для различных ортогональных базисов приведены в таблице 1.15.

Погрешность аппроксимации ортогональными функциями при ограничении на модель КФ

Таблица 1.15

Ортогональный базис	$\Delta_1$	$\Delta_2$
Лагерра	$\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)}$
Лежандра	$\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{A_m^2}{2 \cdot \alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l \cdot (-1)^l\right)^2}{(m+1)^2}$
Дирихле	$\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{A_m^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{A_m^2}{\alpha} \frac{\left(1 - \sum_{l=0}^m \beta_l\right)^2}{(m+1)(m+2)}$

### 1.8. Анализ погрешности вычисления коэффициентов разложения при ограничениях на модель корреляционной функции

Введем обозначение:

$$B_n = \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} \frac{1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}}, \quad (1.115)$$

тогда выражение (1.99) примет вид:

$$b_n = \beta_n + B_n. \quad (1.116)$$

Представим методическую погрешность аппроксимации (1.105) в виде двух составляющих:

$$\Delta_1 = \Delta_{\min} + \Delta_2, \quad (1.117)$$

где

$$\Delta_{\min} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \quad (1.118)$$

$$\Delta_2 = A_m^2 \sum_{k=0}^m B_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.119)$$

Подставив в выражение (1.119) выражение (1.116), получим:

$$\Delta_2 = A_m^2 \sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \tau)}{\|\psi_k\|^2} \left[ \frac{1 - \sum_{n=0}^m \beta_n \psi_n(0, \alpha)}{\sum_{n=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2}} \right]^2. \quad (1.120)$$

Заметим, что выражения (1.117)-(1.120) позволяют оценить методическую погрешность аппроксимации КФ ортогональными функциями при условии «идеальности» коэффициентов разложения  $\beta_k$ .

Запишем погрешность аппроксимации КФ с учетом оценок коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$  в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[ K_x(\tau) - A_m \sum_{k=0}^m \hat{b}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{b}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^m \hat{b}_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Выражение (1.121), как следует из выражения (1.116), является функцией случайных оценок коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$ . Считая отклонения оценок от коэффициентов разложения малыми, разложим выражение (1.121) в ряд Тейлора относительно  $\hat{\beta}_k$  в окрестности  $\beta_k$ , ограничившись квадратичными членами. Для этого найдем соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial \hat{\beta}_n} = -2A_m^2 \left[ \beta_n \frac{\partial \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n} - b_n \frac{\partial \hat{b}_n}{\partial \beta_n} \right] \|\psi_n\|^2; \quad (1.122)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_l}{\partial \hat{\beta}_n^2} = -2A_m^2 \left[ \beta_n \frac{\partial^2 \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n^2} - \left( \frac{\partial \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n} \right)^2 - \hat{b}_n \frac{\partial^2 \hat{b}_n}{\partial \hat{\beta}_n^2} \right] \|\psi_n\|^2; \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_k}{\partial \hat{\beta}_k} = 1 - \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_k\|^2 \sum_{n=0}^m \frac{\psi_n^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} = E_k; \quad (1.124)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{b}_k}{\partial \hat{\beta}_k^2} = 0. \quad (1.125)$$

С учетом формул (1.122)-(1.125) выражение (1.121) примет вид:

$$\Delta_1 = \Delta_{\min} + \Delta_2 + 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k} \|\psi_k\|^2 B_k E_k + A_m^2 \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k}^2 \|\psi_k\|^2 E_k^2. \quad (1.126)$$

Соответственно математическое ожидание погрешности аппроксимации:

$$M[\Delta_1] = \Delta_{\min} + \Delta_2 + 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}] B_k E_k + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 M[\Delta_{\beta_k}^2] E_k^2. \quad (1.127)$$

Из выражения (1.127) видно, что математическое ожидание погрешности аппроксимации помимо минимальной погрешности, содержит две составляющие, численные значения которых линейно зависят от погрешности оценки коэффициентов разложения, и увеличивается с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ . Следует отметить, что в общем случае с увеличением числа членов разложения ряда  $\Delta_{\min}$  уменьшается. Следовательно, существует минимум погрешности по  $m$ .

Найдем центрированное значение методической погрешности аппроксимации:

$$\overset{\circ}{\Delta}_1 = 2A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}]) B_k E_k + A_m^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]) E_k^2; \quad (1.128)$$

$$\overset{\circ}{\Delta}_1^2 = A_m^4 \left( 4 \left( \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}]) B_k E_k \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k}^2 - M[\Delta_{\beta_k}^2]) E_k^2 \right)^2 \right) + \quad (1.129)$$

$$+ 4A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\Delta_{\beta_k} - M[\Delta_{\beta_k}]) B_k E_k \cdot \sum_{n=0}^m \|\psi_n\|^2 (\Delta_{\beta_n}^2 - M[\Delta_{\beta_n}^2]) E_n^2.$$

При условии некоррелированности  $\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_n$  и их нормальном законе распределения, получим:

$$\sigma_{\Delta_1}^2 = A_m^4 \left( 4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^2] - (M[\Delta_{\beta_k}])^2) B_k^2 E_k^2 + \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^4] - (M[\Delta_{\beta_k}^2])^2) E_k^4 \right) + \quad (1.130)$$

$$+ 4A_m^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 (M[\Delta_{\beta_k}^3] - M[\Delta_{\beta_k}] \cdot M[\Delta_{\beta_k}^2]) B_k E_k^3.$$

Из выражения (1.130) следует, что дисперсия погрешности аппроксимации растет с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ , а её численное значение зависит как от вида ортогональных функций, так и погрешности, вызванной смещенностью оценки коэффициентов разложения ряда.

## 1.9. Оценка интервалов корреляции

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [12]:

- показатель колебательности, равный числу пересечений «нуля» корреляционной функцией и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;

- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач, связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл – **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции  $\tau_k^{(1)} = \tau_{k \max}$  определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 1.16):

$$|\rho(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta, \quad (1.131)$$

где  $\Delta$  – заданное значение, принимаемое, как правило, равным 0.01, 0.02, 0.05.

То есть под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  или  $-\Delta$ , после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рисунке 1.15 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,s}) = e^{-\lambda_s |\tau|} \cos(\omega_{0,s} \tau)$  при  $\lambda_s = 1$ ,  $\omega_{0,s} = 5$ ,  $\Delta = 0,05$ .

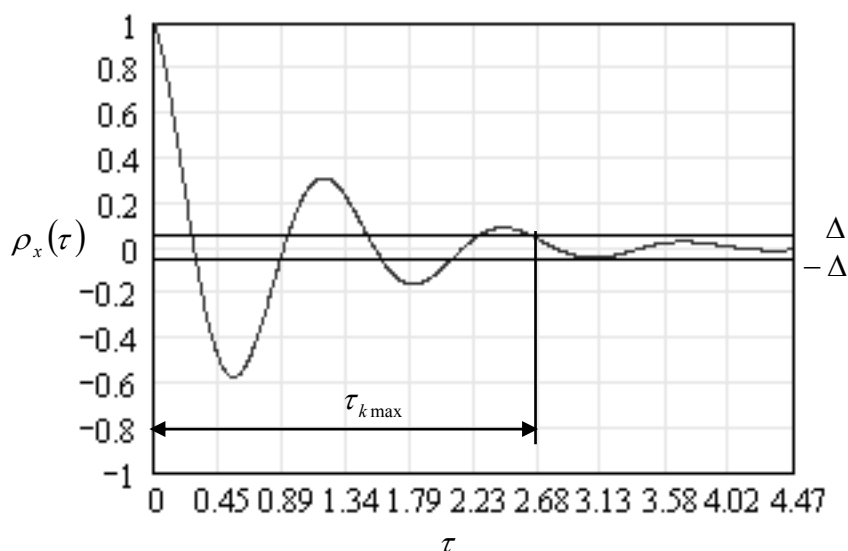


Рисунок 1.15. Максимальный интервал корреляции

Аналитические выражения  $\tau_{k \max}$  для типовых моделей  $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$  приведены в таблице 1.16.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей  
корреляционных функций

Таблица 1.16

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\Delta = 0,01$	$\Delta = 0,02$	$\Delta = 0,05$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau )$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau )$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\lambda_7 \tau }\left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7}\tau)\right)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной КФ [19]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (1.132)$$

Графическая интерпретация величины  $\tau_k^{(2)}$  дана на рисунке 1.16.

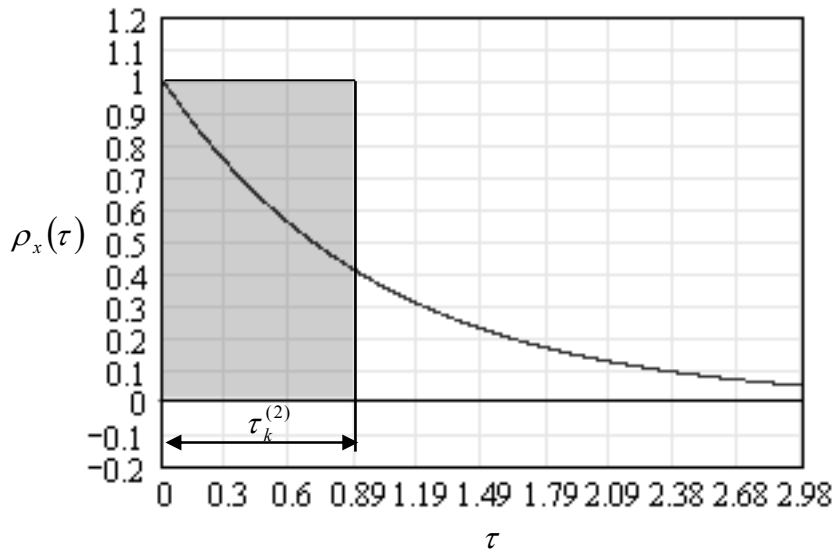


Рисунок 1.16. Интервал корреляции  $\tau_k^{(2)}$

Отметим, что для некоторого класса процессов  $\tau_k^{(2)} = 0$  (например, для колебательных моделей, площадь положительной и отрицательной части которых равна), что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает  $\tau_{k \max} > 0$ .

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции  $\tau_k^{(2)}$  целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка в [14] были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (1.133)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (1.134)$$

Графическая интерпретация величины  $\tau_k^{(3)}$  приведена на рисунке 1.17.

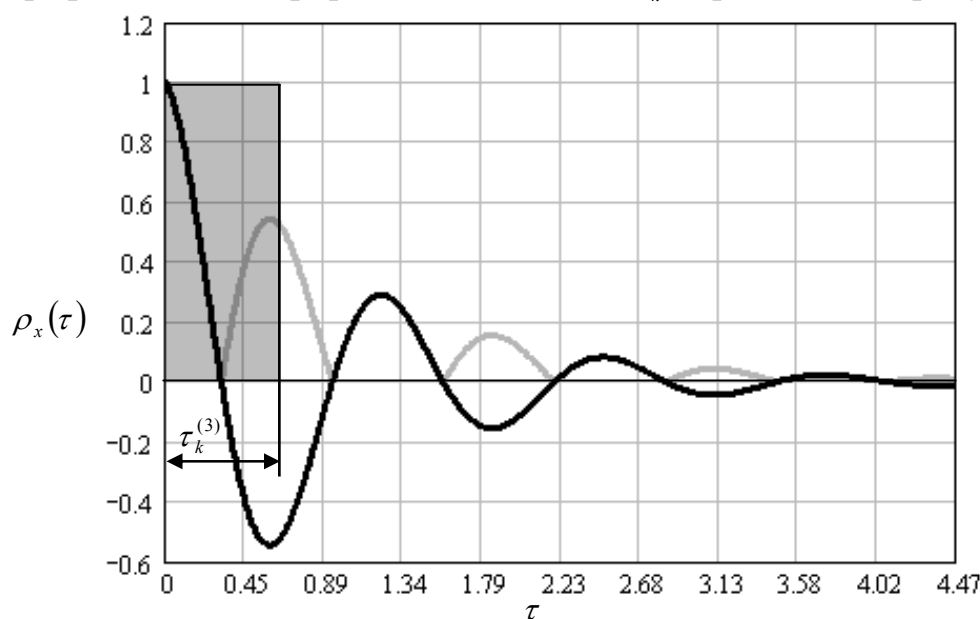


Рисунок 1.17. Интервал корреляции  $\tau_k^{(3)}$

Анализ выражений (1.131) и (1.133) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение  $\tau_k^{(4)}$ . Поэтому, несмотря на то, что  $\tau_k^{(4)}$  дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем  $\tau_k^{(3)}$ . Значения интервалов корреляции  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.17.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.17

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	2	3	4
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{1}{\lambda_1}$	$\frac{1}{2\lambda_1}$
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau )$	$\frac{2}{\lambda_2}$	$\frac{5}{4\lambda_2}$

1	2	3	4
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau )$	0	$\frac{1}{4\lambda_3}$
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$\frac{8}{3\lambda_4}$	$\frac{7}{4\lambda_4}$
5	$e^{-\lambda_5 \tau }\cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\frac{\lambda_5}{\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2}$	$\frac{2\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2}{4\lambda_5(\lambda_5^2 + \omega_{0,5}^2)}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}}\sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$\frac{2\lambda_6}{\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}$	$\frac{5\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2}{4\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau }\left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}}\sin(\omega_{0,7}\tau)\right)$	0	$\frac{1}{4\lambda_7}$

В таблице 1.18 показано, во сколько раз  $\tau_{k \max}$  больше  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  ( $\Delta = 0,05$ ).

Таблица 1.18

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$	3	6
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau )$	2,375	3,8
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau )$	$\infty$	16,56
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	2,22	3,38
5	$e^{-\lambda_5 \tau }\cos(\omega_{0,5}\tau)$	$3(1 + \mu_5^2)$	$\frac{2(1 + \mu_5^2)}{2 + \mu_5^2}$
6	$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}}\sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$1,5 \cdot (1 + \mu_6^2)$	$\frac{12(1 + \mu_6^2)}{(5 + \mu_6^2)}$
7	$e^{-\lambda_7 \tau }\left(\cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}}\sin(\omega_{0,7}\tau)\right)$	$\infty$	12
Примечание: $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$ – показатель колебательности.			

Отсюда видно, что  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  дают сильно заниженный результат по сравнению с  $\tau_{k \max}$ .

В качестве оценки интервалов корреляции можно использовать интервалы корреляции экспоненциальной функции  $\rho_a(\tau, \lambda_1) = e^{-\lambda_1|\tau|}$ , аппроксимирующей нормированную корреляционную функцию по минимуму квадратической погрешности аппроксимации [14].

Определив параметры модели корреляционной функции (1.47) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели аппроксимации.

Так выражение для оценки  $\tau_k^{(2)}$  примет вид:

$$\tau_k^{(2)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (1.135)$$

Отметим, что выражение (1.168) и зависимости для определения спектральных плотностей мощности (см. таблицу 1.25) позволяют определить интервал корреляции корреляционной функции  $\tau_k^{(2)}$ .

Воспользовавшись зависимостями для определения погрешности аппроксимации корреляционной функции (см. таблицу 1.8)

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (1.136)$$

и выражением (1.134), в качестве оценки интервала корреляции можно принять выражение:

$$\tau_k^{(4)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.137)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (1.43). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в разделе 2.2 данной печатной работы.

Выполнив все необходимые преобразования, с учетом свойств ортогональных функций, получим выражения для оценки интервалов корреляции различных ортогональных базисов (см. таблицу 1.19).

Выражения для определения интервалов корреляции

Таблица 1.19

Ортогональный базис	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
Лагерра	$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$
Лежандра	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)}$	$\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+1)}$
Дирихле	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k \frac{1}{(k+1)}$	$\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)}$

### 1.10. Аппроксимация взаимных корреляционных функций

Учитывая большое разнообразие взаимокорреляционных функций, представляется более целесообразным искать модель в виде ортогонального ряда (1.47). Отличие от аппроксимации АКФ заключается в том, что необходимо аппроксимировать как правую (положительную полуплоскость), так и левую (отрицательную полуплоскость) ветви ВКФ относительно оси ординат.



Воспользовавшись понятием единичной функции, модель ВКФ примет вид:

$$K_{xy}(\tau) = K_{xy}(\tau)1(\tau) + K_{xy}(-\tau)1(-\tau), \quad (1.138)$$

где

$$1(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 0, & \text{при } \tau < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 1(-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 1, & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (1.139)$$

Аппроксимативная модель, с учетом (1.138) и (1.139), в этом случае примет вид:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right). \quad (1.140)$$

Следует заметить, что число членов аппроксимирующего ряда для каждой ветви будет свое.

При этом квадратическая погрешность аппроксимации запишется в виде:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_{xy}(\tau) - A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right) \right]^2 d\tau. \quad (1.141)$$

Коэффициенты разложения определяются, исходя из требования минимума этой погрешности.

Для правой ветви:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{n,n}} = \int_0^{\infty} \left[ K_{xy}(\tau) - A_m \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \right] \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau = 0; \quad (1.142)$$

$$\int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau - A_m \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau = 0; \quad (1.143)$$

$$\beta_{n,n} = \frac{1}{A_m \|\psi_n\|_n^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau. \quad (1.144)$$

Для левой ветви:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_{n,l}} = \int_0^{\infty} \left[ K_{xy}(\tau) - A_m \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_l) \right] \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau = 0; \quad (1.145)$$

$$\int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau - A_m \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha_l) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau = 0; \quad (1.146)$$

$$\beta_{n,l} = \frac{1}{A_m \|\psi_l\|_n^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (1.147)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации запишется в виде:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right) d\tau + \quad (1.148)$$

$$+ A_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) \cdot 1(\tau) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(-\tau, \alpha_l) 1(-\tau) \right)^2 d\tau.$$

Исходя из свойств ортогональных функций:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - \\ & - 2A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha_n) d\tau + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha_l) d\tau \right) + \\ & + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 \int_0^{\infty} \psi_k^2(\tau, \alpha_n) d\tau + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \int_0^{\infty} \psi_k^2(\tau, \alpha_l) d\tau. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Пользуясь зависимостями для определения коэффициентов разложения (1.144), (1.147) и свойством ортогональности (1.44), получим:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - 2A_m^2 \left( \sum_{k=0}^{m_n} \|\psi_n\|_k^2 \beta_{k,n}^2 + \sum_{k=0}^{m_l} \|\psi_l\|_k^2 \beta_{k,l}^2 \right) + \\ & + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_n} \|\psi_n\|_k^2 \beta_{k,n}^2 + A_m^2 \sum_{k=0}^{m_l} \|\psi_l\|_k^2 \beta_{k,l}^2 \end{aligned} \quad (1.150)$$

или

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left( \sum_{k=0}^{m_n} \|\psi_n\|_k^2 \beta_{k,n}^2 + \sum_{k=0}^{m_l} \|\psi_l\|_k^2 \beta_{k,l}^2 \right). \quad (1.151)$$

Погрешность аппроксимации ВКФ для различных ортогональных базисов приведена в таблице 1.20.

Погрешность аппроксимации ВКФ ортогональными функциями

Таблица 1.20

Ортогональный базис	Погрешность ограниченного числа членов $\Delta$
Лагерра	$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left( \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l}^2 \right)$
Лежандра	$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left( \frac{1}{2\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\beta_{k,n}^2}{2k+1} + \frac{1}{2\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{\beta_{k,l}^2}{2k+1} \right)$
Дирихле	$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^2(\tau) d\tau - A_m^2 \cdot \left( \frac{1}{2\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\beta_{k,n}^2}{k+1} + \frac{1}{2\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{\beta_{k,l}^2}{k+1} \right)$

Полученные результаты аппроксимации можно улучшить, произведя предварительное преобразование взаимной корреляционной функции.

Например, когда пара данных процессов представляет собой один и тот же процесс, только задержанный на разные интервалы времени, взаимная корреляционная функция имеет резко выраженный максимум, однако эта точка не находится в начале координат. Таким образом, если применять приведенные выше результаты, полученные при аппроксимации автокорреляционной функции, будут проявляться недостатки. В частности, большое число членов разло-

жения ряда для каждой ветви, это связано со свойством ортогональных функций, используемых при аппроксимации (ортогональные функции, используемые здесь, хорошо аппроксимируют убывающие функции).

Для ВКФ не обязательно условие равенства ее максимального значения единице. Однако хорошие результаты, полученные при аппроксимации автокорреляционных функций с наложением такого условия, послужили причиной использования нормировки в случае взаимных корреляционных функций.

При определенном максимуме  $A_m$  в точке  $\tau_m$  модель взаимной корреляционной функции может быть представлена, как:

$$K_{xy}(\tau) = A_m (\rho_{xy}(\tau - \tau_m)l(\tau - \tau_m) + \rho_{xy}(\tau_m - \tau)l(\tau_m - \tau)), \quad (1.152)$$

где  $\tau_m$  – значение времени в точке максимума (разделения ветвей);

$A_m$  – значение ВКФ в точке максимума.

Аппроксимативная модель, с учетом (1.152) и (1.139), в этом случае примет вид:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) \cdot l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \cdot l(\tau_m - \tau) \right). \quad (1.153)$$

Квадратическая погрешность аппроксимации запишется в виде:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_{xy}(\tau) - A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} \beta_{k,n} \cdot \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) \cdot l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} \beta_{k,l} \cdot \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \cdot l(\tau_m - \tau) \right) \right]^2 d\tau. \quad (1.154)$$

Коэффициенты разложения:

Для правой ветви:

$$\beta_{n,n} = \frac{1}{A_m \|\psi_n\|_n^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau + \tau_m) \cdot \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau. \quad (1.155)$$

Для левой ветви:

$$\beta_{n,l} = \frac{1}{A_m \|\psi_l\|_l^2} \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau_m - \tau) \cdot \psi_n(\tau_m, \alpha_l) d\tau. \quad (1.156)$$

Для повышения точности аппроксимации рекомендуется вместо коэффициентов  $\beta_k$  использовать коэффициенты  $b_k$ , приведенные в таблице 1.14. Тогда взаимная корреляционная функция будет выражена в виде:

$$K_{xy}(\tau) = A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \cdot \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) \cdot l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \cdot \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) \cdot l(\tau_m - \tau) \right) \quad (1.157)$$

Условие минимума квадратической погрешности аппроксимации, равно как и алгоритм поиска оптимальных  $\alpha_n$  и  $\alpha_l$ , останется аналогичным. Алгоритм аппроксимации ортогональными функциями приведен на рисунке 1.18.

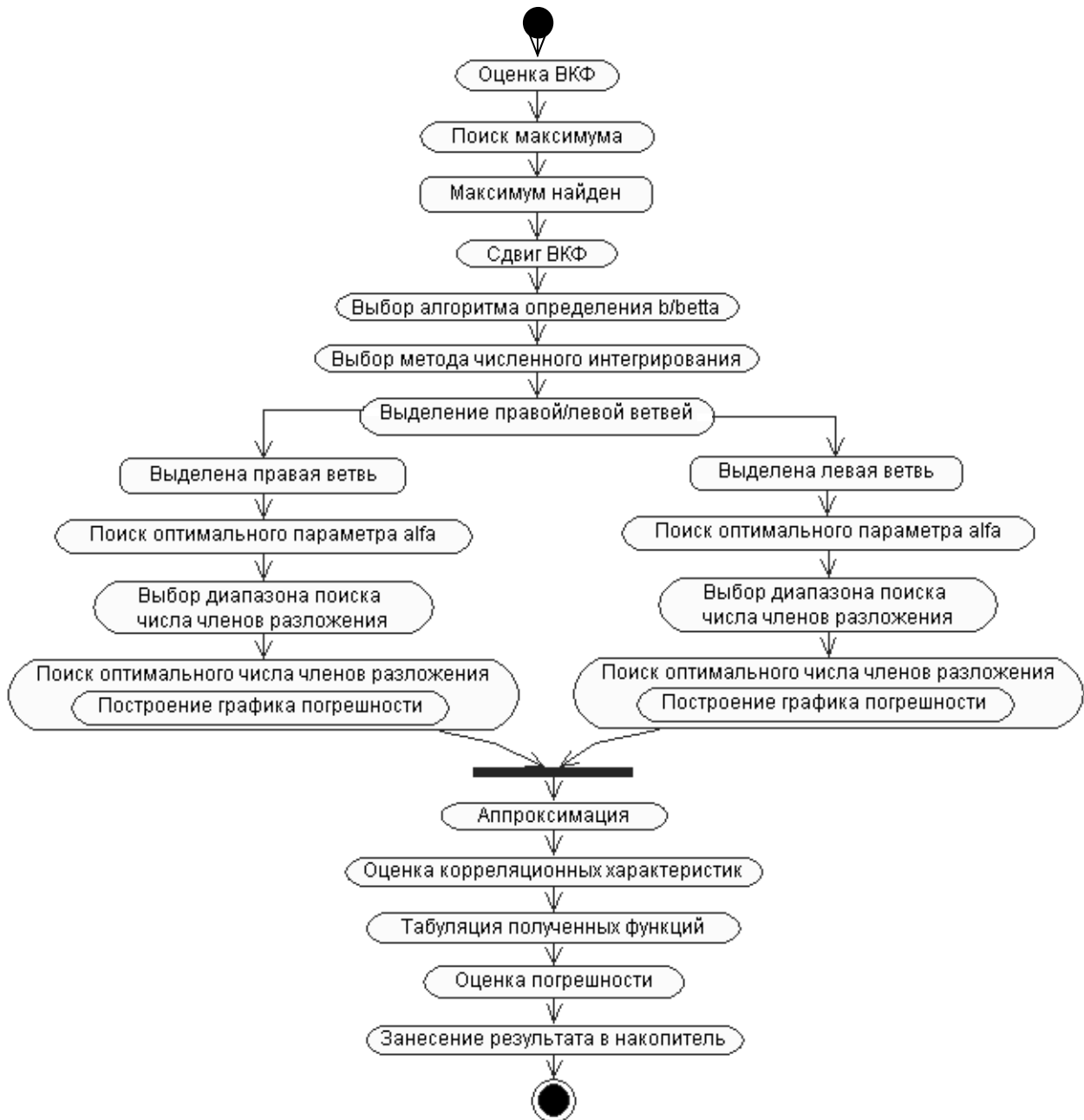


Рисунок 1.18. Аппроксимация ВКФ ортогональными функциями (Диаграмма деятельности UML)

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{k \max xy}$ ; (1.158)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$ ; (1.159)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$ ; (1.160)

- интервала корреляции  $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$ ; (1.161)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик и т.д.

Получаемые при аппроксимации ВКФ ортогональными функциями выражения, для определения интервала корреляции, приведены в таблице 1.21. При этом используется модель ВКФ (1.153).

Выражения для определения интервала корреляции

Таблица 1.21

Ортогональный базис	$\tau_{k\ xy}^{(2)}$	$\tau_{k\ xy}^{(4)}$
Лагерра	$2 \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k}{\alpha_n} + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k}{\alpha_l} \right]$	$\left[ \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n}^2 + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l}^2 \right]$
Лежандра	$\left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{1}{(2k+1)\alpha_n} + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{1}{(2k+1)\alpha_l} \right]$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{b_{k,n}^2}{(2k+1)} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{b_{k,l}^2}{(2k+1)} \right]$
Дирихле	$\left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha_n} + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha_l} \right]$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{b_{k,n}^2}{(k+1)} + \frac{1}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} \frac{b_{k,l}^2}{(k+1)} \right]$

### 1.11. Аппроксимация спектральной плотности мощности функциями заданного вида

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [3]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.162)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.163)$$

С учетом четности функций  $K_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$ , воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (1.162), (1.163) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \quad (1.164)$$

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega. \quad (1.165)$$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.22.

Спектральные плотности мощности

Таблица 1.22

№	Вид модели $K_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
1	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_1 \tau }$	$\sigma_x^2 \frac{\lambda_1}{\pi(\lambda_1^2 + \omega^2)}$
2	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau )$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_2^3}{\pi(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau )$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_3\omega^2}{\pi(\lambda_3^2 + \omega^2)^2}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$\sigma_x^2 \frac{8\lambda_4^5}{3\pi(\lambda_4^2 + \omega^2)^3}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\sigma_x^2 \frac{\lambda_5}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega + \omega_{0,5})^2} + \frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega - \omega_{0,5})^2} \right)$
6	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_6 \tau } \left( \cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau ) \right)$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}{\pi(\lambda_6^2 + (\omega + \omega_{0,6})^2)(\lambda_6^2 + (\omega - \omega_{0,6})^2)}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_7 \tau } \left( \cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau ) \right)$	$\sigma_x^2 \frac{2\lambda_7\omega^2}{\pi(\lambda_7^2 + (\omega + \omega_{0,7})^2)(\lambda_7^2 + (\omega - \omega_{0,7})^2)}$
8	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_8 \tau } (\cos(\omega_{0,8}\tau) + C \sin(\omega_{0,8} \tau ))$	$\sigma_x^2 \frac{\lambda_8(\lambda_8^2 + \omega_{0,8}^2 + \omega^2) + C\omega_{0,8}(\lambda_8^2 + \omega_{0,8}^2 - \omega^2)}{\pi(\lambda_8^2 + (\omega + \omega_{0,8})^2)(\lambda_8^2 + (\omega - \omega_{0,8})^2)}$

Заметим, что значение  $C$  в 8 модели должно удовлетворять условию:

$$-\frac{\lambda_8}{\omega_{0,8}} \leq C \leq \frac{\lambda_8}{\omega_{0,8}}, \quad (1.166)$$

это связано с тем, что плотность не может быть отрицательной.

В таблице 1.23 показаны спектральные плотности мощности при  $\lambda_i = 1$ ,  $\omega_{0,i} = 5$ ,  $C = 0.1$ .

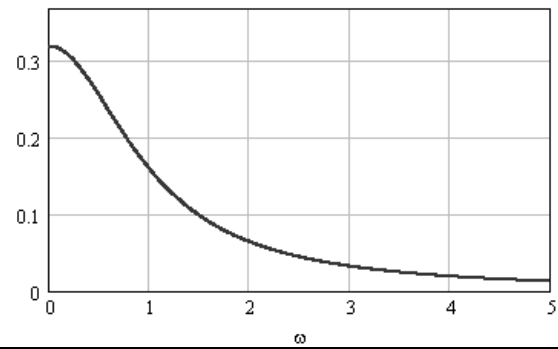
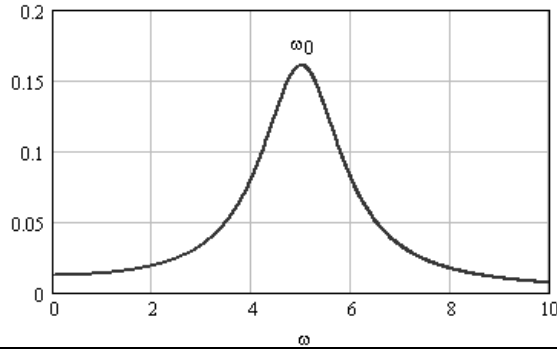
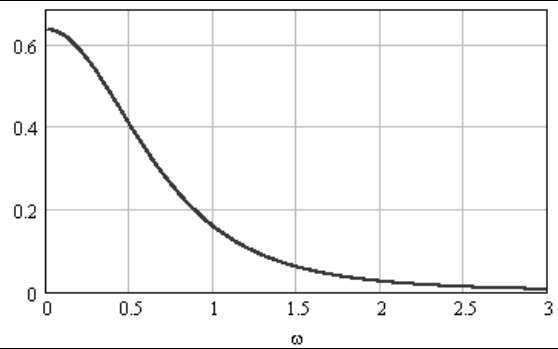
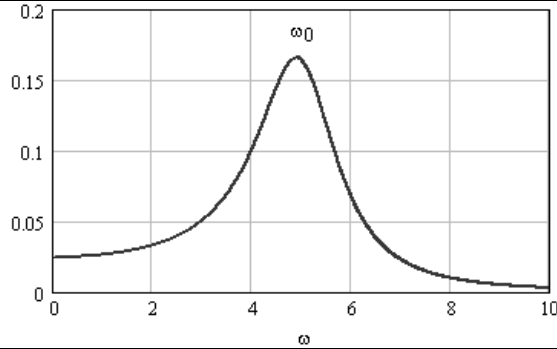
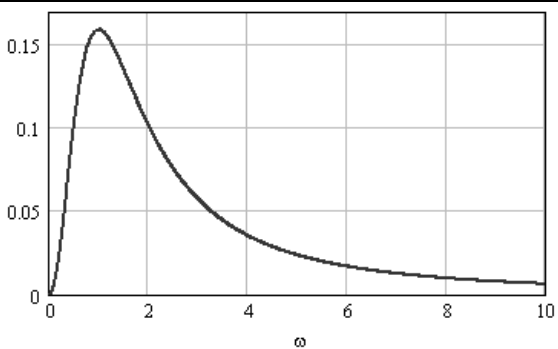
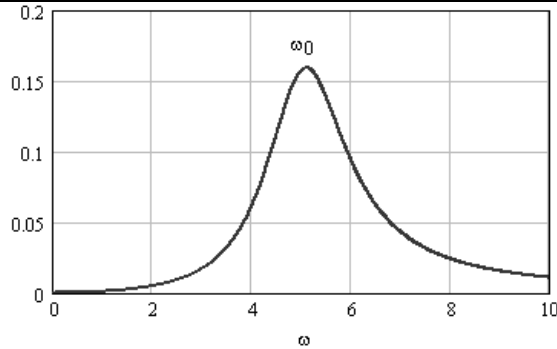
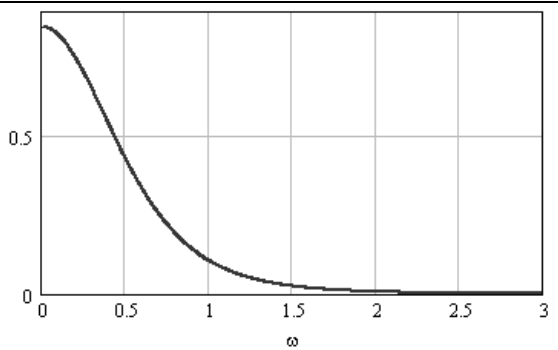
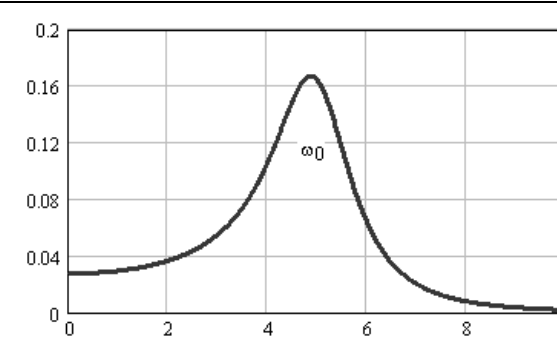
Подставив в выражение (1.165)  $\tau = 0$ , получим:

$$K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega - \quad (1.167)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Вид спектральной плотности мощности

Таблица 1.23

№	$S_x(\omega)$	№	$S_x(\omega)$
1		5	
2		6	
3		7	
4		8	

Подставив в выражение (1.164)  $\omega = 0$ , получим

$$S_x(0) = \frac{\sigma_x^2 \tau_k^{(2)}}{\pi}. \quad (1.168)$$

При решении некоторых прикладных задач требуется знание аналитического выражения спектральной плотности мощности. Благодаря наличию аналитической связи между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности вопросы их аппроксимации оказываются взаимосвязанными [14].

Запишем квадратическую погрешность аппроксимации спектральной плотности процесса  $S_x(\omega)$  функцией заданного вида  $S_a(\omega)$ :

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(\omega) - S_a(\omega)]^2 d\omega. \quad (1.169)$$

Раскрыв квадратные скобки в (1.169), получим:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^2(\omega) d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) S_a(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_a^2(\omega) d\omega. \quad (1.170)$$

Подставим в (1.170) значения  $S_x(\omega)$  и  $S_a(\omega)$ , полученные из корреляционной функции при помощи преобразования Винера-Хинчина [1]:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases} \quad (1.171)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Применяя к внутренним интегралам обратное преобразование Винера-Хинчина и учитывая четность корреляционной функции, получим:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau)]^2 d\tau. \quad (1.173)$$

Из выражения (1.173) видно, что задача аппроксимации спектральной плотности мощности функциями заданного вида сводится к задаче аппроксимации корреляционной функции функциями вида:

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.174)$$

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.175)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (1.176)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(j\omega) = \text{Re}S_{xy}(j\omega) - j\text{Im}S_{xy}(j\omega). \quad (1.177)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(j\omega) = \text{Re}S_{xy}(j\omega) + j\text{Im}S_{xy}(j\omega). \quad (1.178)$$



Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Представив модель взаимной корреляционной функции в виде

$$K_{axy}(\tau) = K_{ax}(\tau - \tau_m), \quad (1.179)$$

определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ax}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} d\tau = \exp(-j\omega\tau_m) S_x(\omega). \quad (1.180)$$

Воспользовавшись выражением (1.180) и результатами, представленными в таблице 1.22, можно определить аналитические выражения взаимной спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций.

Из выражения (1.180) видно, что

$$\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega) = \cos \omega\tau_m S_x(\omega); \quad (1.181)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = -\sin \omega\tau_m S_x(\omega). \quad (1.182)$$

Воспользовавшись (1.175), получим:

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (1.183)$$

Обозначим

$$S_{axy}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) - j \operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega). \quad (1.184)$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) + j \operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega). \quad (1.185)$$

А взаимная спектральная плотность мощности запишется, как:

$$S_{axy}(j\omega) = \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) + \operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega) - j(\operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega) - \operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega)). \quad (1.186)$$

Подставив зависимости, приведенные в таблице 1.24, и найденные параметры аппроксимирующих выражений в (1.186), можно определить спектральную плотность мощности.

### Преобразование Фурье корреляционных функций

Таблица 1.24

№	Вид модели $K_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$S_{axy}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$	
1	2	3	
1	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_1 \tau }$	$\operatorname{Re} S_{axy}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \omega^2}$
		$\operatorname{Im} S_{axy}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\lambda_1^2 + \omega^2}$

1	2	3	
2	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_2 \tau } (1 + \lambda_2 \tau )$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_2^3}{(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(3\lambda_2^2 + \omega^2)}{(\lambda_2^2 + \omega^2)^2}$
3	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_3 \tau } (1 - \lambda_3 \tau )$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_3\omega^2}{(\lambda_3^2 + \omega^2)^2}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \lambda_3^2)}{(\lambda_3^2 + \omega^2)^2}$
4	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_4 \tau } \left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{8\lambda_4^5}{3(\lambda_4^2 + \omega^2)^3}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(15\lambda_4^4 + 10\lambda_4^2\omega^2 + 3\omega^4)}{3(\lambda_4^2 + \omega^2)^3}$
5	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_5}{2} \left( \frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega + \omega_{0,5})^2} + \frac{1}{\lambda_5^2 + (\omega - \omega_{0,5})^2} \right)$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega + \omega_{0,5}}{\lambda_5^2 + (\omega + \omega_{0,5})^2} - \frac{\omega - \omega_{0,5}}{\lambda_5^2 + (\omega - \omega_{0,5})^2} \right)$
6	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_6 \tau } \left( \cos(\omega_{0,6}\tau) + \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6} \tau ) \right)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_6(\lambda_6^2 + \omega_{0,6}^2)}{(\lambda_6^2 + (\omega + \omega_{0,6})^2)(\lambda_6^2 + (\omega - \omega_{0,6})^2)}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(3\lambda_6^2 + \omega^2 - \omega_{0,6}^2)}{(\lambda_6^2 + (\omega + \omega_{0,6})^2)(\lambda_6^2 + (\omega - \omega_{0,6})^2)}$
7	$\sigma_x^2 e^{-\lambda_7 \tau } \left( \cos(\omega_{0,7}\tau) - \frac{\lambda_7}{\omega_{0,7}} \sin(\omega_{0,7} \tau ) \right)$	$\text{Re } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{2\lambda_7\omega^2}{(\lambda_7^2 + (\omega + \omega_{0,7})^2)(\lambda_7^2 + (\omega - \omega_{0,7})^2)}$
		$\text{Im } S_{a_{xy}}^0(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \omega_{0,7}^2 - \lambda_7^2)}{(\lambda_7^2 + (\omega + \omega_{0,7})^2)(\lambda_7^2 + (\omega - \omega_{0,7})^2)}$

Представим взаимную корреляционную функцию, как

$$K_{axy}^{(m)}(\tau) = A_m K_{axy}(\tau - \tau_m). \quad (1.187)$$

Тогда выражение для взаимной спектральной плотности мощности запишем:

$$S_{axy}(j\omega) = A_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{axy}(\tau - \tau_m) e^{-j\omega\tau} d\tau = A_m e^{-j\omega\tau_m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{axy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.188)$$

В этом случае вещественная и мнимая части спектральной плотности мощности запишутся в виде

$$\begin{aligned} \text{Re } S_{axy}(j\omega) = A_m & \left[ \cos \omega\tau_m (\text{Re } S_{a_n}^0(j\omega) + \text{Re } S_{a_l}^0(j\omega)) - \right. \\ & \left. - \sin \omega\tau_m (\text{Im } S_{a_n}^0(j\omega) - \text{Im } S_{a_l}^0(j\omega)) \right]; \end{aligned} \quad (1.189)$$

$$\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega) = -A_m \left[ \sin \omega \tau_m (\operatorname{Re} S_{an}^0(j\omega) + \operatorname{Re} S_{al}^0(j\omega)) + \cos \omega \tau_m (\operatorname{Im} S_{an}^0(j\omega) - \operatorname{Im} S_{al}^0(j\omega)) \right], \quad (1.190)$$

где

$$S_{an}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{an}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad S_{al}^0(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_{al}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.191)$$

а  $K_{an}(\tau), K_{al}(\tau)$  – аппроксимирующие функции правой и левой ветви.

Так как взаимная спектральная плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = |S_{axy}(\omega)| \exp[j\varphi(\omega)] \quad (1.192)$$

– величина комплексная, при анализе используют графики вещественной и мнимой частей, модуля взаимной спектральной плотности мощности:

$$|S_{axy}(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega))^2 + (\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega))^2} \quad (1.193)$$

и фазы:

$$\varphi_{axy}(\omega) = \operatorname{arctg} \left[ -\frac{\operatorname{Im} S_{axy}(j\omega)}{\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega)} \right]. \quad (1.194)$$

## 1.12. Аппроксимация спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Определив параметры модели корреляционной функции  $b_0, \dots, b_m, \alpha$

$$K_a(\tau) = A_m \left\{ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right\}, \quad (1.195)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого, подставив модель (1.195) в выражение для определения спектральной плотности мощности (1.162), получим:

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.196)$$

С учетом определения частотной характеристики ортогональных функций (1.59), получим:

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k [W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)]. \quad (1.197)$$

Подставив в выражение (1.197) значения частотных характеристик (см. таблицу 1.10), определим спектральную плотность мощности для различных ортогональных базисов.

### Ортогональный базис Лагерра

Подставив в выражение (1.197) значение частотной характеристики ортогонального базиса Лагерра (см. табл. 1.10), получим:

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{\alpha/2 + j\omega} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{\alpha/2 - j\omega} \left( \frac{j\omega + \alpha/2}{j\omega - \alpha/2} \right)^k \right]. \quad (1.198)$$

Введем обозначение  $tg\varphi = \frac{2\omega}{\alpha}$ . Тогда

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{1+jtg\varphi} \left( \frac{jtg\varphi-1}{jtg\varphi+1} \right)^k + \frac{1}{1-jtg\varphi} \left( \frac{jtg\varphi+1}{jtg\varphi-1} \right)^k \right] \quad (1.199)$$

или

$$S_{ax}(\omega) = \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+j\sin\varphi} \left( \frac{j\sin\varphi-\cos\varphi}{j\sin\varphi+\cos\varphi} \right)^k + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi-j\sin\varphi} \left( \frac{j\sin\varphi+\cos\varphi}{j\sin\varphi-\cos\varphi} \right)^k \right]. \quad (1.200)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (1.200) приведем к виду:

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m \cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{e^{j\varphi}} \left( \frac{-e^{-j\varphi}}{e^{j\varphi}} \right)^k + \frac{1}{e^{-j\varphi}} \left( \frac{e^{j\varphi}}{-e^{-j\varphi}} \right)^k \right] = \\ &= \frac{A_m \cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k [e^{-(2k+1)\varphi} + e^{(2k+1)\varphi}] = \frac{2A_m \cos\varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos((2k+1)\varphi), \end{aligned} \quad (1.201)$$

где  $\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}$ .

### Ортогональный базис Лежандра

Подставив в выражение (1.197) значение частотной характеристики ортогонального базиса Лежандра (см. табл. 1.10), получим:

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{j\omega + (2k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-j\omega + (2n+1)\alpha}{j\omega + (2n+1)\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-j\omega + (2k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{j\omega + (2n+1)\alpha}{-j\omega + (2n+1)\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (1.202)$$

Введем обозначение  $tg(\varphi_k) = \frac{\omega}{(2k+1)\alpha}$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{(2k+1)(1+jtg(\varphi_k))} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{1-jtg(\varphi_n)}{1+jtg(\varphi_n)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2k+1)(1-jtg(\varphi_k))} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{1+jtg(\varphi_n)}{1-jtg(\varphi_n)} \right] \end{aligned} \quad (1.203)$$

или

$$\begin{aligned} S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)(\cos(\varphi_k) + j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)(\cos(\varphi_k) - j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)} \right]. \end{aligned} \quad (1.204)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (1.204) приведем к виду:

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \left[ \frac{1}{e^{j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-j\varphi_n}}{e^{j\varphi_n}} + \frac{1}{e^{-j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{e^{j\varphi_n}}{e^{-j\varphi_n}} \right] = \\
 &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \left[ \exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) + \exp\left(j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) \right] = \\
 &= \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right),
 \end{aligned} \quad (1.205)$$

где  $\varphi_k = \arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha}$ .

### Ортогональный базис Дирихле

Подставив в выражение (1.197) значение частотной характеристики ортогонального базиса Дирихле (см. таб. 1.10), получим:

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{j\omega - (n+1)\alpha}{j\omega + (n+1)\alpha} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{-j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{(-1) \cdot ((n+1)\alpha + j\omega)}{(n+1)\alpha - j\omega} \right].
 \end{aligned} \quad (1.206)$$

Введем обозначение  $tg(\varphi_k) = \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{1}{(k+1)(jtg(\varphi_k) + 1)} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{jtg(\varphi_n) - 1}{jtg(\varphi_n) + 1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(k+1)(-jtg(\varphi_k) + 1)} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-jtg(\varphi_n) - 1}{-jtg(\varphi_n) + 1} \right]
 \end{aligned} \quad (1.207)$$

или

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \frac{\cos(\varphi_k)}{(k+1)(\cos(\varphi_k) + j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) + j \cdot \sin(\varphi_n)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos(\varphi_k)}{(k+1)(\cos(\varphi_k) - j \cdot \sin(\varphi_k))} \cdot \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n) - j \cdot \sin(\varphi_n)} \right].
 \end{aligned} \quad (1.208)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (1.208) приведем к виду:

$$\begin{aligned}
 S_{ax}(\omega) &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(k+1)} \left[ \frac{1}{e^{j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-e^{-j\varphi_n}}{e^{j\varphi_n}} + \frac{1}{e^{-j\varphi_k}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{-e^{j\varphi_n}}{e^{-j\varphi_n}} \right] = \\
 &= \frac{A_m}{2\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k \cos(\varphi_k)}{(k+1)} \left[ \exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp\left(j\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)\right) \right] =
 \end{aligned} \quad (1.209)$$

$$= \frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k \cos(\varphi_k)}{(k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right),$$

где  $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$ .

Спектральные плотности мощности для различных ортогональных базисов приведены в таблице 1.25.

Спектральная плотность мощности при аппроксимации ортогональными функциями

Таблица 1.25

Ортогональный базис	$S_{ax}(\omega)$
Лагерра	$\frac{2A_m \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos((2k+1)\varphi)$
Лежандра	$\frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\cos(\varphi_k)}{(2k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)$
Дирихле	$\frac{A_m}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k \cos(\varphi_k)}{(k+1)} \cos\left(\varphi_k + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_n\right)$

Представим модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_m \left( \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_n) l(\tau - \tau_m) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_l) l(\tau_m - \tau) \right). \quad (1.210)$$

Определим аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности для различных ортогональных базисов.

### Ортогональный базис Лагерра

С учетом (1.183) и свойств ортогональных функций выражение (1.210) запишется в виде:

$$S_{axy}(j\omega) = A_m \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \exp(-j(2k+1)\varphi_n) + \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \exp(-j(2k+1)\varphi_l) \right], \quad (1.211)$$

где  $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_n}$ , а  $\varphi_l = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_l}$ .

С учетом (1.211), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\operatorname{Re} S_{axy}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_n) + \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_l) \right] - \quad (1.212)$$

$$\begin{aligned}
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_n) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_l) \right]; \\
\text{Im} S_{a_{xy}}(j\omega) = & A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_n) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \sin((2k+1)\varphi_l) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{\pi} \left[ \frac{\cos(\varphi_n)}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_n) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos(\varphi_l)}{\alpha_l} \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} (-1)^k \cos((2k+1)\varphi_l) \right].
\end{aligned} \tag{1.213}$$

### Ортогональный базис Лежандра

С учетом (1.183) и свойств ортогональных функций выражение (1.210) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
S_{a_{xy}}(j\omega) = & A_m \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right)\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right)\right) \right],
\end{aligned} \tag{1.214}$$

где  $\varphi_n = \arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_n}$ , а  $\varphi_l = \arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_l}$ .

С учетом (1.214), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\begin{aligned}
\text{Re} S_{a_{xy}}(j\omega) = & A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \sin\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right];
\end{aligned} \tag{1.215}$$

$$\text{Im} S_{a_{xy}}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \tag{1.216}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{m_2} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) \Big] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{\cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{\cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right].
\end{aligned}$$

### Ортогональный базис Дирихле

С учетом (1.183) и свойств ортогональных функций выражение (1.210) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
S_{a,xy}(j\omega) = A_m \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} & \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right)\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \exp\left(-j\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right)\right) \right], \quad (1.217)
\end{aligned}$$

где  $\varphi_n = \arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha_n}$ , а  $\varphi_l = \arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha_l}$ .

С учетом (1.217), выражения для оценки действительной и мнимой частей взаимной спектральной плотности мощности примут вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} S_{a,xy}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} & \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \sin\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right]; \quad (1.218)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} S_{a,xy}(j\omega) = A_m \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} & \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \sin\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) - \right. \\
& \left. - \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \sin\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right] - \\
& - A_m \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,n})}{(k+1)\alpha_n} \cos\left(\varphi_{k,n} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} \frac{(-1)^k \cos(\varphi_{k,l})}{(k+1)\alpha_l} \cos\left(\varphi_{k,l} + 2\sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l}\right) \right]. \quad (1.219)
\end{aligned}$$



Обобщенные зависимости для определения взаимной спектральной плотности мощности, ее действительной и мнимой части приведены ниже.

Аналитическое выражение взаимной спектральной плотности мощности:

$$S_{a.xy}(j\omega) = Am \frac{\exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot e^{-j\phi_{k,n}} + \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot e^{j\phi_{k,l}} \right]. \quad (1.220)$$

Действительная часть взаимной спектральной плотности мощности:

$$\begin{aligned} \text{Re } S_{a.xy}(j\omega) = Am \left[ \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \cos(\phi_{k,n}) + \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \cos(\phi_{k,l}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \sin(\phi_{k,l}) - \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \sin(\phi_{k,n}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.221)$$

Мнимая часть взаимной спектральной плотности мощности:

$$\begin{aligned} \text{Im } S_{a.xy}(j\omega) = Am \left[ \frac{\cos(\omega\tau_m)}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \sin(\phi_{k,l}) - \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \sin(\phi_{k,n}) \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sin(\omega\tau_m)}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{m_n} A_{k,n} \cdot \cos(\phi_{k,n}) + \sum_{k=0}^{m_l} A_{k,l} \cdot \cos(\phi_{k,l}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.222)$$

Значения  $A_{k,n}$ ,  $\phi_{k,n}$ ,  $A_{k,l}$ ,  $\phi_{k,l}$  сведены в таблицу 1.26.

Таблица 1.26

Ортогональный базис	Ветвь	
	правая	левая
Лагерра	$A_{k,n} = \frac{2b_{k,n} \cos(\varphi_n) (-1)^k}{\alpha_n};$ $\phi_{k,n} = \varphi_n (2k+1);$ $\varphi_n = \text{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_n}$	$A_{k,l} = \frac{2b_{k,l} \cos(\varphi_l) (-1)^k}{\alpha_l};$ $\phi_{k,l} = \varphi_l (2k+1);$ $\varphi_l = \text{arctg} \frac{2\omega}{\alpha_l}$
Лежандра	$A_{k,n} = \frac{b_{k,n} \cdot \cos(\varphi_{k,n})}{(2k+1)\alpha_n};$ $\phi_{k,n} = \varphi_{k,n} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n};$ $\varphi_{k,n} = \text{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_n}$	$A_{k,l} = \frac{b_{k,l} \cdot \cos(\varphi_{k,l})}{(2k+1)\alpha_l};$ $\phi_{k,l} = \varphi_{k,l} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l};$ $\varphi_{k,l} = \text{arctg} \frac{\omega}{(2k+1)\alpha_l}$
Дирихле	$A_{k,n} = \frac{b_{k,n} \cdot \cos(\varphi_{k,n}) \cdot (-1)^k}{(k+1)\alpha_n};$ $\phi_{k,n} = \varphi_{k,n} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,n};$ $\varphi_{k,n} = \text{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\alpha_n}$	$A_{k,l} = \frac{b_{k,l} \cdot \cos(\varphi_{k,l}) \cdot (-1)^k}{(k+1)\alpha_l};$ $\phi_{k,l} = \varphi_{k,l} + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \varphi_{n,l};$ $\varphi_{k,l} = \text{arctg} \frac{\omega}{(k+1)\alpha_l}$

## 2. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ КОМПЛЕКС АППРОКСИМАТИВНОГО АНАЛИЗА КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

### 2.1. Назначение, основные функции и требования

Автоматизированный комплекс аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов предназначен для определения взаимных корреляционных функций (ВКФ), аппроксимации полученных ВКФ ортогональными функциями Лежандра, Лагерра, Дирихле, определения по полученным оценкам ВКФ спектральных характеристик [14]. Следует отметить, что параметры ортогональных разложений ВКФ определяются как в автоматизированном режиме, так и в режиме ручной настройки, что позволяет более гибко использовать автоматизированную систему при обработке экспериментальных данных и результатов моделирования.

Кроме этого, комплекс позволяет регистрировать и формировать аналоговые сигналы с помощью встроенной в персональный компьютер звуковой карты и подключаемого через интерфейс ISA многофункционального устройства сопряжения с ЭВМ – НВЛ-08 [12]. Аналоговый сигнал, получаемый в результате исследований, принимается на входе системы, проходит аналого-цифровое преобразование и подвергается аппроксимативному корреляционно-спектральному анализу.

Для решения учебных задач, а также исследования алгоритмов определения взаимных корреляционных функций предусмотрена возможность генерации коррелированных псевдослучайных последовательностей (ПП) с последующей обработкой.

Моделирование двух процессов с заданной ВКФ происходит с помощью системы фильтров, путем преобразования первичного сигнала, например, «белого шума». Фильтры реализуются в виде элементов-модулей, частотные характеристики которых известны. Подобный подход применен в автоматизированном комплексе корреляционно-спектрального анализа, описанном в [12]. Множество элементов-модулей, доступных для проектирования сети, ограничено, но предусмотрена возможность добавления новых.

Следует отметить, что исследование новых (разрабатываемых) алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методами имитационного моделирования, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Часто при решении задач имитационного моделирования средств измерений, алгоритмов статистической обработки информации, их метрологическом анализе возникает необходимость в формировании процессов с заданным видом корреляционной функции. При этом не обращают внимания на закон распределения процесса. Теоретически эта задача решается методом фильтрации и сводится к определению характеристик формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [12] (см. рис. 2.1).

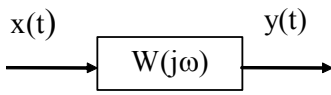


Рисунок 2.1

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (2.1)$$

где  $S_x(\omega)$  – спектральная плотность мощности входного сигнала;

$|W(j\omega)|^2$  – квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что  $S_x(\omega)$ ,  $S_y(\omega)$  и  $|W(j\omega)|^2$  – чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (2.3)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра  $W(j\omega)$  во многом будет определяться видом  $S_x(\omega)$ . При использовании в качестве входного сигнала «белого шума» с  $S_x(\omega) = S_0$ , получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (2.4)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.5)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$Y(j) = \Delta\tau \sum_{i=0}^{N1} x(j-i)h(i), \quad (2.6)$$

где  $N1$  – число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$  – интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h(i) = h(i\Delta\tau)$  – значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Этот способ преобразования является основой для цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой – КИХ фильтров.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой относительной погрешности вы-

числения корреляционной функции  $\delta$  и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Как правило, интервалы дискретизации временных рядов выбираются равными интервалам дискретизации корреляционных функций. Интервалы дискретизации и минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции при линейной интерполяции и различных погрешностях представлены в таблице 2.1 [14]. Интервалы дискретизации выбираются из учета применения линейной интерполяции КФ [13 стр. 84]. Количество ординат определяется из условия  $|\rho(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta$ , при этом  $J_{\max} = \frac{\tau_{k \max}}{\Delta \tau}$ .

Интервалы дискретизации и минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции

Таблица 2.1

Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	$\Delta \tau$	$J_{\max}$			
		$\delta=0.02$	$\delta=0.05$	$\delta=0.1$	$\delta=0.2$
$e^{-\lambda_1 \tau }$	$\frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\lambda_1}$	9	6	4	3
$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau )$	$\frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\lambda_2}$	13	9	7	5
$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau )$	$\frac{\sqrt{8 \cdot \frac{\delta}{3}}}{\lambda_3}$	19	13	10	7
$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2 \tau^2}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{24 \cdot \delta}}{\lambda_4}$	10	7	5	4
$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$	$\frac{1}{\lambda_5} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\sqrt{ \mu_5^2 - 1 }}$	$47 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$	$30 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$	$21 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$	$15 \cdot \frac{\mu}{2\pi}$
$e^{-\lambda_6 \tau }\left(\cos(\omega_{0,6}\tau) \pm \frac{\lambda_6}{\omega_{0,6}} \sin(\omega_{0,6}\tau)\right)$	$\frac{1}{\lambda_6} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot \delta}}{\sqrt{ \mu_6^2 + 1 }}$				

Примечание:  $\mu_i = \frac{\omega_{0,i}}{\lambda_i}$  – показатель колебательности.

Более быстродействующий алгоритм моделирования случайных процессов связан с использованием рекурсивной фильтрации (цифровые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой – БИХ фильтры)

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i} \quad (2.7)$$

Параметры  $a_i$  и  $b_i$  для фильтров, используемых в системе, определяются в соответствии с приложением 2.

Для анализа системы использован алгоритм передачи возбуждения по объектам семантической сети. Возбуждение передается от модуля анализа, назад до модулей генерации. В случае, если данные в модуле генерации уже созданы, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Та-

ким образом, данные, полученные на выходе модуля, используются для всех присоединенных к нему элементов-модулей. Если вычисление сети прошло неудачно, и в системе были обнаружены ошибки, пользователю выдается соответствующее сообщение.

Разработанные алгоритмы аппроксимативного взаимного корреляционно-спектрального анализа реализованы в автоматизированной системе, реализующей функции, приведенные на рисунке 2.2.

Система содержит четыре подсистемы:

- моделирования коррелированных случайных процессов;
- аппроксимативного анализа взаимных корреляционных функций;
- аппроксимативного анализа взаимных спектральных плотностей мощности;
- ведение базы данных.

Для простоты работы с системой и предоставления возможности накопления результатов исследования, в комплексе используются накопители (файл, база данных).

Использование базы данных позволяет облегчить определение методических погрешностей методом имитационного моделирования, предоставляет возможность накопления информации об алгоритмах аппроксимации, упрощения идентификации взаимных корреляционных функций.

### **Аппаратные и программные требования к системе**

Для нормального функционирования автоматизированной системы необходимо, чтобы Ваш компьютер соответствовал перечисленным ниже требованиям.

*Общие требования:*

- 50 МБ свободного места на жестком диске;
- CD-ROM-устройство, дисковод 3.5" или Flash Disk (для установки автоматизированного комплекса с носителя);
- графический адаптер и дисплей SVGA (800x600) и 256 цветов;
- установленная СУБД Microsoft SQL Server 2000 (для работы с БД);
- звуковая плата (необходима для использования одноименного элемента-модуля семантической сети);
- мышь или аналогичное устройство.

*Windows 98:*

- процессор Intel Pentium® 133 МГц или выше;
- 32 МБ оперативной памяти.

*Windows ME:*

- процессор Intel Pentium® 150 МГц или выше;
- 32 МБ оперативной памяти.



Рисунок 2.2. Функции автоматизированного комплекса анализа временных рядов

*Windows NT Workstation 4.0 (Service Pack 6a):*

- процессор Intel Pentium® 133 МГц или выше;
- 32 МБ оперативной памяти.

*Windows 2000 Professional (Service Pack 2 или выше):*

- процессор Intel Pentium® 133 МГц или выше;
- 64 МБ оперативной памяти.

*Windows XP Home Edition или XP Professional (Service Pack 1 или выше):*

- процессор Intel Pentium® 300 МГц или выше;
- 128 МБ оперативной памяти.

Требования приведены для случая нормального функционирования операционной системы, а также утилит и сервисов, используемых комплексом.

## **Установка автоматизированного комплекса на компьютер**

Чтобы установить автоматизированный комплекс на Ваш компьютер, запустите файл *setup.exe*, расположенный на электронном носителе.

Программа установки работает в диалоговом режиме. Каждое окно содержит набор кнопок для управления процессом установки. Кратко поясним их назначение:

- **Далее >** – принять действие и перейти к следующему шагу процедуры установки;
- **< Назад** – вернуться на предыдущий шаг установки;
- **Отмена** – отказаться от установки продукта;
- **Завершить** – завершить процедуру установки комплекса на компьютер.

Рассмотрим подробно каждый шаг процедуры установки пакета.

### **Шаг 1. Проверка версии установленной операционной системы**

Прежде чем приступить к установке программы, выполняется проверка соответствия установленной операционной системы и Service Pack требованиям, предъявляемым автоматизированным комплексом.

В случае, если какой-либо из требуемых Service Pack для операционной системы не установлен, на экран будет выведено соответствующее сообщение. Для дальнейшей работы необходимо установить Service Pack посредством сервиса **Windows Update**, после чего повторить установку программного комплекса.

### **Шаг 2. Выбор директории установки**

Следующий этап установки автоматизированного комплекса определяет директорию на вашем компьютере, в которую будет установлен продукт. По умолчанию задан путь: «**C:\ProgramFiles\Кафедра ИСТ\Аппроксимативный анализ**».

Чтобы изменить путь, нажмите на кнопку «**Обзор...**» (см. рис. 2.3), в стандартном окне выбора укажите директорию установки продукта и нажмите на кнопку «**Далее >**». После этого будет запущена процедура копирования файлов программного комплекса на Ваш компьютер.

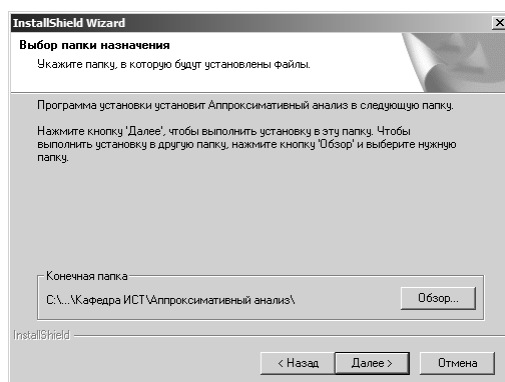


Рисунок 2.3. Выбор директории установки

### Шаг 3. Выбор директории программ

На данном этапе установки определяется директория программ, в которую будет установлен комплекс (см. рис. 2.4). По умолчанию выбрана директория: «**Аппроксимативный анализ**» основного меню «**ПУСК**».

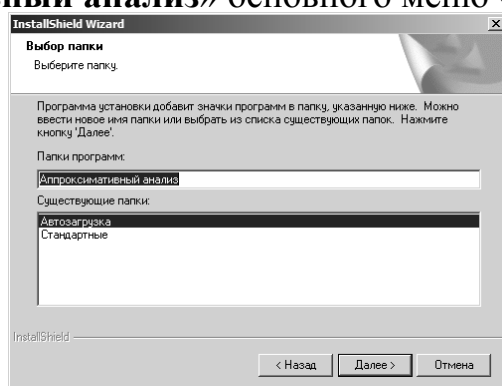


Рисунок 2.4. Выбор директории программ

Для продолжения установки нажмите на кнопку «**Далее**>».

### Шаг 4. Завершение процедуры установки

Окно «**Завершение установки**» содержит информацию об окончании процесса установки программного комплекса на Ваш компьютер (см. рис. 2.5).

Если для завершения установки программы требуется регистрация ряда сервисов в системе, Вам будет предложено перезагрузить компьютер. Это **НЕОБХОДИМО** для корректного завершения установки продукта.

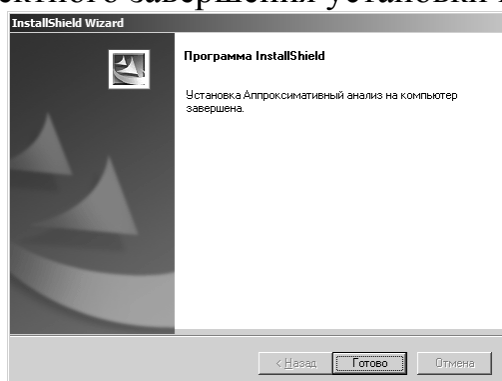


Рисунок 2.5. Окно завершения процедуры установки

Если же перезагрузки компьютера для завершения установки не требуется, чтобы закончить установку программы, нажмите на кнопку «**Готово**».

После завершения установки, в заданной директории программ, должен появиться каталог «**Анализ сигналов**» (см. рис. 2.6).



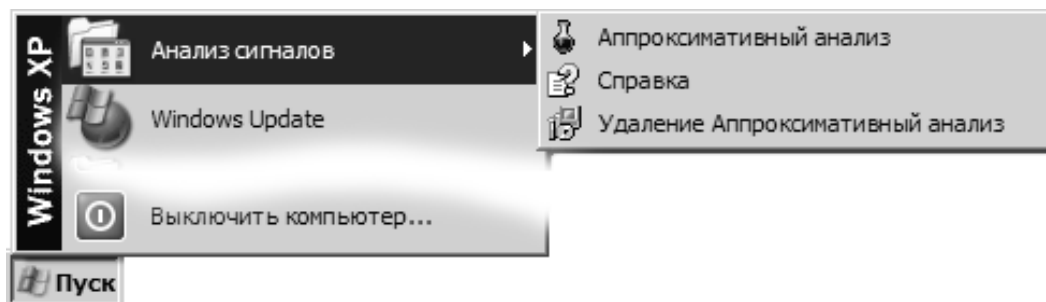


Рисунок 2.6. Директория программ ПУСК

В директории «Анализ сигналов» создается три элемента:

- «Аппроксимативный анализ» – используется для запуска автоматизированного комплекса;
- «Справка» – позволяет вызвать окно справочной системы;
- «Удаление Аппроксимативный анализ» – используется для деинсталляции автоматизированного комплекса из операционной системы.

## 2.2. Интерфейс пользователя

Автоматизированный комплекс аппроксимативного анализа обладает достаточно простым и удобным в работе интерфейсом. В данной главе рассматриваются основные его элементы: главное окно программы и некоторые сервисные окна, меню пользователя, строка статуса, справочная система. Также приводится описание структуры элементов-модулей автоматизированного комплекса, освещаются правила их использования.

### Главное окно программы: общая структура

Главное окно программы состоит из областей: *Меню пользователя*, *Редактирование семантической сети*, *Параметры*, *Воздействия и Реакция*, *Накопители и информация об ошибках*, *Строка статуса*. Расположение областей в окне программы показано на рисунке 2.7.

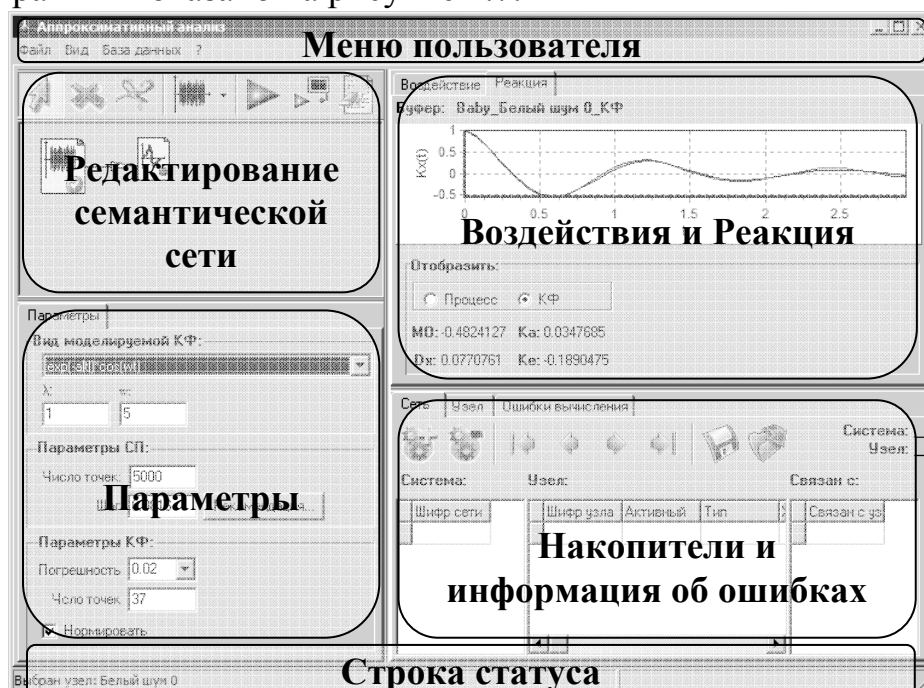


Рисунок 2.7. Главное окно программы

Перечисленные области главного окна программы рассматриваются далее.

### 2.2.1. Область *Редактирование семантической сети*

Область «**Редактирование семантической сети**» располагается в верхнем левом углу окна. Здесь возможно редактирование сети: перемещение узлов, добавление новых, их связывание и удаление.

Для редактирования сети используется панель инструментов, которая находится непосредственно над областью редактирования.

Элементы панели инструментов:



«Переместить» – переместить элемент-модуль сети.



«Удалить» – Удалить элемент-модуль сети.



«Связать» – Установить связи между двумя элементами-модулями.



«Добавить» – Добавить в семантическую сеть новый элемент-модуль. Тип модуля выбирается нажатием кнопки со стрелкой, расположенной справа. Символьное обозначение выбранного модуля указано на кнопке.






«Вычислить сеть» – Произвести вычисления во всех элементах семантической сети.



«Вычислить узел» – Произвести вычисления в выделенном элементе сети.



«Очистить сеть» – Очистить результаты предыдущих вычислений семантической сети.


Для выбора инструмента необходимо нажать на нем клавишей мыши и произвести соответствующие действия в области редактирования. По окончании редактирования сети, ее можно вычислить полностью , или произвести вычисления в только в выделенном элементе-модуле  (см. рис. 2.8). Также предусмотрена возможность очистки результатов предыдущих вычислений сети .

Панель инструментов



Рис. 2.8. Пример семантической сети, панель инструментов

Имеются правила отображения элементов-модулей сети, позволяющие определить состояние того или иного узла. Каждому узлу, доступному в системе, соответствует пиктограмма, которая отображается в стилизованной








рамке. Если узел вычислен, то в правом нижнем углу отображается галочка , сигнализирующая о достоверности вычисленных данных. Изображение активного узла (узла, чьи свойства: «Параметры», «Воздействие»,

«Реакция» доступны для редактирования) выделяется на фоне остальных узлов сети размером.

Дуги, связывающие узлы, отображаются в виде прямых линий со стрелкой. Стрелка указывает направление передачи данных от одного узла к другому.

**Пример:**

*Синтезировать систему для вычисления спектральной плотности мощности, изображенную на рисунке 2.8.*

- 1) Выбрать тип добавляемого элемента-модуля «Источник СП» .
- 2) Выделить инструмент «Добавить» .
- 3) Щелкнуть левой кнопкой мыши в области редактирования. В семантическую сеть добавится новый элемент-модуль, а в области редактирования появится соответствующая ему пиктограмма . Вновь добавленный модуль становится активным, и в областях «Параметры», «Воздействие» и «Реакция» отображаются его характеристики.
- 4) Выбрать тип добавляемого элемента-модуля «Фильтр» .
- 5) Выделить инструмент «Добавить» .
- 6) Щелкнуть левой кнопкой мыши над областью редактирования. В семантическую сеть добавится элемент-модуль «Фильтр», а в области редактирования появится соответствующая ему пиктограмма .
- 7) Выделить инструмент «Связать» .
- 8) Щелкнуть левой кнопки мыши на элементе-источнике информации, передаваемой по линии создаваемой связи, затем – на приемнике.



В результате, при компиляции семантической сети приемник будет использовать данные, поступающие от источника.

- 9) Дальнейший синтез сети производят по аналогии.

После того как создана сеть, она может быть вычислена нажатием кнопки

▶. Для анализа и вычисления системы использован алгоритм передачи возбуждения по объектам семантической сети. В созданной семантической сети наименования семантических групп совпадают с наименованием классов функциональных модулей. Возбуждение передается от модулей анализа назад до модулей генерации. В случае, если процесс в модуле генерации уже создан, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Таким образом, данные, полученные на выходе модуля, передаются во все присоединенные к нему модули.

№	Тип ошибки
1	Действия узла 'ВКФ 4' выполнены с ошибкой.
2	Действия узла 'Орт_Алпр 5' выполнены с ошибкой.
3	Действия узла 'Спектр 7' выполнены с ошибкой.

Рис. 2.9. Вкладка «Ошибки вычисления»

Вкладка «Ошибки вычисления» отображает список ошибок, возникших при вычислении системы. В созданной семантической сети наименования семантических групп совпадают с наименованием классов функциональных модулей. Возбуждение передается от модулей анализа назад до модулей генерации. В случае, если процесс в модуле генерации уже создан, а этот модуль был возбужден, повторная генерация не производится. Таким образом, данные, полученные на выходе модуля, передаются во все присоединенные к нему модули.

Если компиляция прошла неудачно, и в системе были обнаружены ошибки, пользователю выдаются соответствующие сообщения. Ошибки, возникшие

в результате вычисления сети, отображаются на вкладке «Ошибки вычисления» (см. рис. 2.9). Все сообщения сводятся в таблицу, при этом указывается узел, в котором произошел сбой.

### 2.2.2. Область *Параметры*

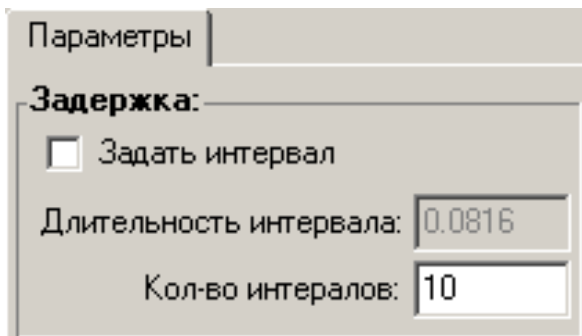


Рис. 2.10. Вкладка «Параметры» узла «Линия задержки»

На панели «Параметры» (см. рис. 2.10) изображены параметры узла, доступные пользователю для настройки. Из рисунка видно, что для данного узла возможно задание длительности интервала дискретизации и количества интервалов в реализуемой задержке. Если флаг «Задать интервал» не выбран, длительность интервала будет равна шагу дискретизации исходного СП, поступающего от узла-источника (узла, связанного дугой).

### 2.2.3. Область *Воздействие*

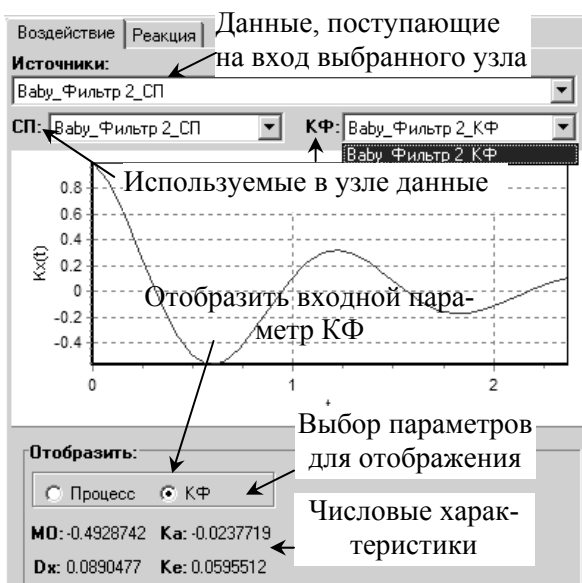


Рис. 2.11. Вкладка «Воздействие» узла «Линия задержки»

Как упоминалось выше, каждый узел семантической сети имеет три набора свойств: «Параметры», «Воздействие», «Реакция». Для отображения этих множеств в системе предусмотрено три вкладки с одноименными названиями. Вкладка «Параметры» располагается под областью редактирования семантической сети, вкладки «Воздействие», «Реакция» в правом верхнем углу. Для примера рассмотрим структуру вкладок для узла «Линия задержки».

Чтобы определить исходные данные элемента-модуля, поступающие от других модулей, необходимо перейти на вкладку «Воздействие» (см. рис. 2.11). Структура вкладки одинакова для всех узлов. В верхней ее части отображается всплывающий список «Источники», где указываются все исходные данные, поступающие на вход узла. Данные, используемые в узле для вычислений, также отображаются во всплывающих списках, но в них указываются только данные, подходящие по типу для выбранного параметра узла. В нашем случае это параметры «СП» и «КФ». Также на вкладке располагаются элементы, задающие режим отображения входных

данных и области для их отображения. В случае линии задержки – график для отображения СП или КФ и элемент выбора отображаемых данных, а также поля для отображения числовых характеристик процесса.

#### 2.2.4. Область *Реакция*

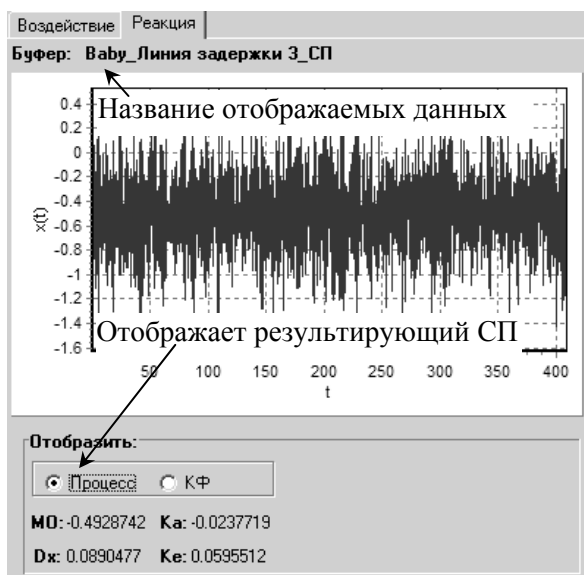


Рис. 2.12. Вкладка «Реакция» узла «Линия задержки»

По окончании вычислений в узле формируется результат. Результат отображается на вкладке «Реакция», которая содержит элементы для отображения данных и их выбора. В нашем случае на панели «Реакция» отображается исходный СП (или его КФ), задержанный на заданное количество интервалов времени (см. рис. 2.12).

При моделировании сети необходимо помнить, что в модуле используются те данные, которые выбраны во всплывающем списке исходных данных (см. предыдущий раздел). Для нашего примера в качестве исходных данных СП используется «Baby\_Фильтр 2\_СП», КФ – «Baby\_Фильтр 2\_КФ». Это данные,

сформированные в узле «Фильтр 2» и переданные по дуге в узел «Линия задержки 3». В результате вычисления в элементе-модуле «Линия задержки 3» были сформированы буферы для СП – «Baby\_Линия задержки 3\_СП» и для КФ – «Baby\_Линия задержки 3\_КФ», содержащие результат вычислений в узле. Названия результатов отображаются в верхней части вкладки «Реакция».

#### 2.2.5 Область *Накопители и информация об ошибках*

Область состоит из трех закладок «Система», «Модуль», «Ошибки вычисления».

Закладка «Ошибки вычисления» была описана в разделе *Редактирование семантической сети*.

##### Закладка «Система»

Закладка «Система» предназначена для отображения информации о семантических сетях, содержащихся в БД (см. рис. 2.13). Здесь приводится таблица хранящихся в БД систем (таблица «Система»), узлов, входящих в выделенную сеть (выделенная сеть помечается треугольником в левой части таблицы «Система»), а также в таблице «Связан с» указываются модули, с которыми связан активный модуль (модуль, выделенный в таблице «Модуль»).



Рисунок 2.13. Закладка «Система»

Шифр сети, указанный в таблице «Система», формируется по правилам: в начале указывается слово «Сеть\_», далее следует порядковый номер месяца в текущем году «№месяца\_» и день, завершает символьное название сети время ее создания. Выбор активной сети осуществляется стрелками перемещения курсора или нажатием левой клавиши мыши.

В таблице «Узел» указываются все узлы, содержащиеся в выделенной сети. Информация в таблице обновляется каждый раз, когда выбирается новая сеть. Помимо шифра узла указывается его тип и координаты. Наименования узлов, связанных с выделенным в таблице «Узел», отображаются в таблице «Связан с».

В правом верхнем углу закладки дублируется информация о выделенной в данный момент сети и узле.

Для взаимодействия с БД на закладке расположена панель инструментов, описание ее элементов приводится ниже.



Создать новую семантическую сеть и добавить ее в БД.

Удалить из БД выделенную в таблице «Система» семантическую сеть.

Выделить семантическую сеть, расположенную в начале таблицы «Система».

Выделить следующую семантическую сеть таблицы «Система».

Выделить предыдущую семантическую сеть таблицы «Система».

Выделить семантическую сеть, расположенную в конце таблицы «Система».

Сохранить выделенную семантическую сеть в файл.

Открыть сохраненную ранее семантическую сеть.

### Закладка «Модуль»

Закладка «Модуль» предназначена для работы с накопителями (файл, БД), здесь указывается буфер данных активного узла сети (буфер, с которым









производятся манипуляции), его тип и соответствующие этому типу данные, сохраненные ранее в БД (см. рис. 2.14).



Рисунок 2.14. Закладка «Модуль»

Тип буфера данных, с которым производятся действия, указывается в элементе выбора, при этом задается один из вариантов: «Параметры», «Воздействие», «Реакция». При указании типа во всплывающем списке «Буферы данных» указываются имена буферов данных, доступных в активном узле, и отвечающие требованиям типа данных. Содержимое выбранного во всплывающем меню буфера данных будет сохраняться в накопитель или заполняться содержимым накопителя в зависимости от выбранной в панели инструментов команды.

Перечислим команды панели инструментов, расположенной на закладке «Модуль».

-  Выделить буфер данных, расположенный в начале таблицы БД.
-  Выделить следующий буфер данных.
-  Выделить предыдущий буфер данных.
-  Выделить буфер данных, расположенный в конце таблицы «Система».
-  Сохранить выделенный буфер данных в БД.
-  Открыть сохраненный ранее буфер БД.
-  Сохранить выделенный буфер данных в файл.
-  Открыть сохраненный ранее буфер данных.

**Примечание:** Для удаления информации из БД необходимо выбрать удаляемую строку и нажать клавишу **Ctrl+Del**.

Между узлами семантической сети информация передается в виде буферов данных. **Буфер данных** – это объект, содержащий результаты вычислений, произведенных в узле.

При формировании имен буферов данных в комплексе используются следующие соглашения: имя буфера данных состоит из идентификатора системы «Baby\_», после которого указывается имя узла (например «Фильтр 2\_»), затем указывается тип данных, отражающий его содержимое.

В автоматизированном комплексе предусмотрены следующие типы данных:

**СП** – случайный процесс;

**КФ** – корреляционная функция;

**ВКФ** – взаимная корреляционная функция;

**betta** – коэффициенты ряда Фурье, вычисленные в результате аппроксимации взаимной корреляционной функции [13];

**b** – коэффициенты ряда Фурье, вычисленные в результате аппроксимации при ограничении на модель корреляционной функции  $K_x(0) = Dx$ ;

### Примечание:

Для типов **betta** и **b** дополнительно указывается ветвь, к которой они относятся (**\_ЛВ** – левая ветвь, **\_ПВ** – правая ветвь).

**Sxy** – спектральная плотность мощности;

**SxyRe** – действительная часть спектральной плотности мощности;

**SxyIm** – мнимая часть спектральной плотности мощности;

**SxyPh** – фаза спектральной плотности мощности;

**SxyMo** – модуль спектральной плотности мощности.

### Пример:

Если в списке источников узла «ВКФ 4» указан буфер данных с названием «Baby\_Белый шум 0\_СП», это говорит о том, что на вход узла «ВКФ 4» поступает СП, сформированный в узле семантической сети с названием «Белый шум 0».

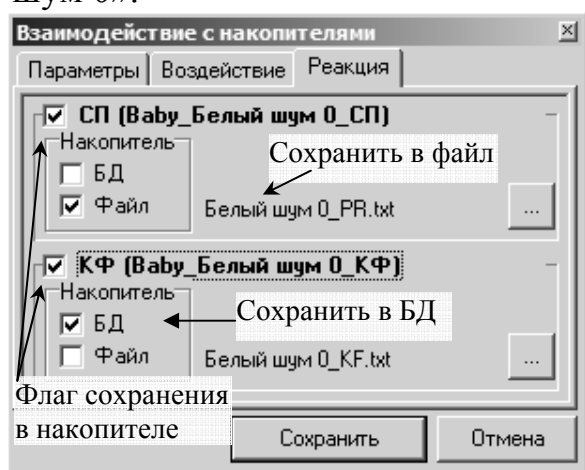






Рис. 2.15. Окно «Взаимодействие с накопителями»

После того, как получены результаты вычисления системы, их можно сохранить в накопитель. Накопителями могут служить файл и база данных. С целью унификации механизма работы с накопителем в программном комплексе используется диалоговое окно «Взаимодействие с накопителем» (см. рис. 2.15). Оно вызывается на вкладке «Узел» и содержит для работы все блоки данных активного узла, доступные для работы с накопителем. Для занесения данных в файл используется кнопка  для чтения – . Для чтения и записи в базу данных (БД) используются  и  соответственно. Окно взаимодействия с накопителями состоит из трех вкладок, по числу типов данных. На первой вкладке отображаются параметры, на второй – воздействия, на третьей –

98



реакции. На вкладках отображаются данные активного в настоящий момент узла. Каждому блоку данных соответствует область, состоящая из элемента выбора с указанием типа данных и указанного в скобках названия. Если элемент выбран, буфер сохраняется в накопителе. Далее указывается тип накопителя «БД» или «Файл». На рисунке 2.15 СП с названием «Baby\_Белый шум 0\_СП» настроен на запись в файл «Белый шум 0\_PR.txt», а КФ с названием «Baby\_Белый шум 0\_КФ» – на запись в БД.

### **Использование базы данных для хранения результатов обработки**

Современные методы описания процессов в информационных системах разнообразны и требуют различного смыслового содержания и представления для применения в инженерной практике. Среди них большое значение имеют теоретико-вероятностные методы исследований, основанные на вероятностной трактовке протекающих в информационных системах процессов. Вероятностный (статистический) подход позволяет более полно учесть состояние динамической системы, характер управляющих и возмущающих воздействий и во многих случаях более адекватен практическим задачам. Основой для статистических решений и оптимальной обработки сигналов служат аналитические методы математической статистики. В математической статистике исходными являются имеющие случайный характер результаты наблюдения или экспериментальные данные из опытов. Задачей математической статистики является, во-первых, определение по результатам наблюдения путем обработки сигналов оценок параметров или статистических характеристик явлений или событий, связанных с наблюдениями, во-вторых, исследование точности их приближения к оцениваемым статистическим характеристикам.

При определении погрешностей результатов измерения и их характеристик объектом исследования становятся методы описания и количественного анализа методических погрешностей, а так же методы экспериментального определения погрешностей. Изучение составляющих погрешностей, вызванных той или иной причиной, позволяет определить пути их уменьшения.

Реальные устройства, как правило, оказываются одновременно нелинейными и инерционными. Решение задач анализа для этого общего случая сопряжено с большими трудностями, поскольку аналитическое решение задач по оценке методической погрешности и ее составляющих возможно только для сравнительно простых вероятностных характеристик и лишь для нормальных процессов. В связи с этим сложную систему можно представить в виде комбинации отдельных линейных и нелинейных устройств (звеньев), а анализ системы может быть сведен к анализу преобразования сигналов через отдельные устройства.

Задача синтеза системы является достаточно трудоемкой. В основе ее лежит выбор элементов-модулей с известными характеристиками из некоторого множества и их взаимная стыковка с целью получения необходимых характеристик всей системы в целом. При этом испытывается недостаток информации о влиянии различных комплектующих и их свойств на конечный результат.

При получении пары процессов с заданной взаимной корреляционной функцией возникает проблема классификации взаимных корреляционных функций и выбора модулей системы генерации. Пара процессов, полученная из единого источника первичного сигнала, например, «белого шума», с помощью системы фильтров с известными частотными характеристиками, имеет известную взаимно корреляционную функцию. Однако при определении зависимости вида взаимно корреляционной функции пары процессов от импульсных характеристик формирующих фильтров возникает необходимость в накоплении информации о сгенерированных процессах и использованных при этом фильтрах.

Таким образом, использование базы данных о фильтрах и полученных в результате генерации процессах позволяет решить ряд задач, а именно:

1. определение методических погрешностей аппроксимации методом имитационного моделирования;
2. накопление информации об алгоритмах получения пар процессов с заданными взаимными корреляционными функциями посредством синтеза системы формирующих фильтров с заданными переходными характеристиками;
3. облегчение идентификации взаимных корреляционных функций получаемых пар процессов;
4. решение задачи синтеза системы получения процессов с использованием экспертных алгоритмов.

При этом нет необходимости в хранении большого объема информации, а именно самих процессов и взаимных корреляционных функций. Достаточно вести базу данных об использованных фильтрах и хранить параметры аппроксимирующих выражений с указанием погрешностей аппроксимации.

Для выполнения приведенных выше функций информационной среды необходимо иметь средства, обеспечивающие ведение базы знаний по модулям, их параметрам и настройкам, а также синтезированным системам и алгоритмам синтеза с использованием базы знаний. В качестве базы знаний целесообразно использовать семантическую сеть.

В качестве узлов сети будут выступать модули, составляющие системы, дугами, соединяющими узлы сети, будем обозначать связи между модулями, по которым передается информация. Дуги имеют направление, показывающее связь выхода предыдущего модуля с входом следующего.

При составлении семантической сети можно выделить следующие семантические группы: источник СП, фильтр, линия задержки, формирователь ВКФ, ортогональный фильтр, нелинейный преобразователь, формирователь спектра, накопитель, АЦП. Соединение модулей семантической сети осуществляется связыванием. При связывании у каждого модуля может быть несколько источников и приемников, однако при вычислении в модуле используются данные, которые заданы как исходные на вкладке «Воздействие». Единицей передаваемой информации считается буфер данных, содержимое и формат которого зависит от типа. Тип исходных данных и формируемых результатов в модуле определяется автоматически и контролируется при определении исходных данных модуля.