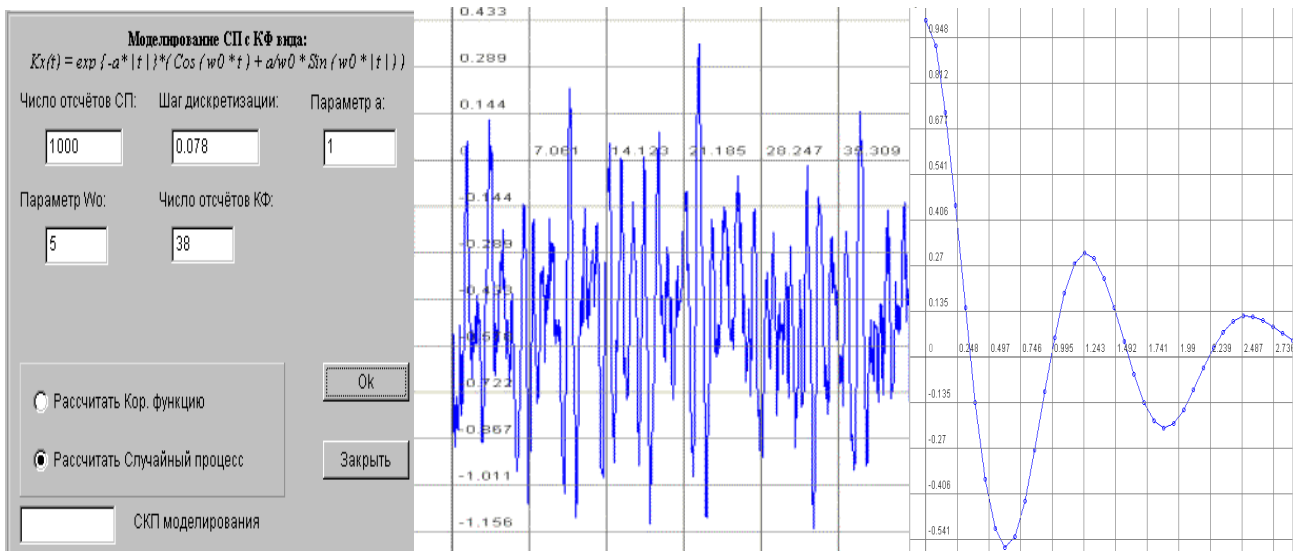


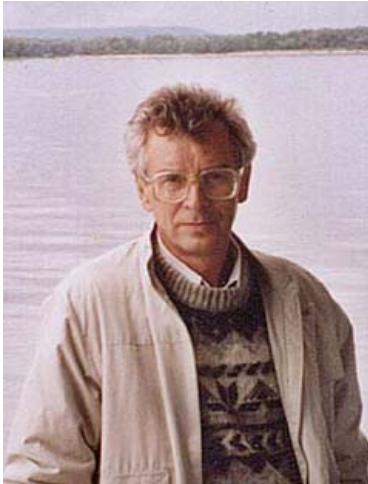
С.А. Прохоров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ



Уральск 2001 г.

Об авторе



Прохоров Сергей Антонович – доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информатизации, член-корреспондент Российской академии естественных наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, декан факультета информатики, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета, директор Самарского филиала Российского НИИ информационных систем.

В качестве председателя Головного Совет Минвуза России по автоматизации научных исследований в период 1988-1996 г.г. руководил разработкой и выполнением шести научно-исследовательских программ и подпрограмм АН СССР, Минэлектронпрома СССР, Минвуза России.

Результаты его работы нашли отражение в 180 научных трудах, в том числе, 5 монографиях, 40 авторских свидетельствах, 6 работах опубликованных за рубежом, выступлениях более чем на 50 международных, всесоюзных и республиканских конференциях и симпозиумах.

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

ББК 32.965

П 5

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор

Сойфер В.А.;

д.ф-м.н., профессор Жданов А.И.

Прохоров С.А.

П 5 Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 209 с.: ил.

ISBN 9965-01-957-6

Рассматриваются методы описания, алгоритмы и программные средства генерирования случайных процессов, потоков событий, неэквидистантных временных рядов с заданными вероятностными характеристиками, а также методы и средства оценки качества генерирования, основанные на аппроксимативном подходе и анализе фазовых портретов.

Приводится описание разработанных автоматизированных информационных систем для генерирования и аппроксимативного анализа случайных процессов, временных рядов.

Предназначена для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов в качестве руководства по моделированию случайных процессов с заданными свойствами и имитационному моделированию алгоритмов и средств оценивания вероятностных характеристик случайных процессов, потоков событий и неэквидистантных временных рядов.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары».

ББК 32.965

Печатается по решению издательского совета Самарского научного центра Российской академии наук.

П $\frac{2402000000}{00(05)-01}$

ISBN 9965-01-957-6

© Самарский научный центр Российской академии наук, 2001

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001

© Прохоров С.А., 2001

	Стр.
СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ВВЕДЕНИЕ	10
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ	17
1.1. Основные понятия и определения	17
1.2. Математическое описание случайных величин	23
1.3. Функции случайных аргументов	25
1.4. Системы случайных величин	26
1.5. Математическое описание случайных сигналов	30
1.6. Корреляционные характеристики	36
1.7. Спектральные характеристики	45
1.8. Математическое описание случайных потоков событий	50
1.9. Математическое описание неэквидистантных временных рядов	58
1.10. Типовые модели неэквидистантных временных рядов	66
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	78
2.1. Моделирование временных рядов типа "белого" шума	78
2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения	81
2.2.1. Метод обратной функции	81
2.2.2. Приближенный метод моделирования	83
2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами	90
2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей	95
2.5. АИС для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданными законами распределения	99
2.5.1. Описание подсистем	99
2.5.2. Описание интерфейса программ	101
2.5.3. Порядок работы с системой	110
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	111
3.1. Моделирование временных рядов с заданным видом корреляционной функции	111
3.2. Анализ методических погрешностей генерирования ПСП с заданным видом корреляционных функций	114
3.3. Экспериментальные исследования точностных характеристик программных генераторов ПСП с заданным видом корреляционных функций	121
3.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций	125
3.5. Моделирование N ПСП с заданным видом корреляционных функций, некоррелированных между собой	132
3.6. Генерирование 2-х ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций	133
3.7. Генерирование ПСП с заданным видом корреляционной функции и законом распределения отличным от нормального	138
3.8. Генерирование неэквидистантных временных рядов	143
3.9. Генерирование нестационарных временных рядов	147

4.	АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	150
4.1.	Учебно-исследовательская система для корреляционно-спектрального анализа	150
4.2.	Учебно-исследовательская система для моделирования и аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик	162
4.3.	Применение имитационного моделирования для исследования статистических характеристик временных рядов	168
4.4.	Анализ методических погрешностей результатов измерений вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов методом имитационного моделирования	171
4.5.	Анализ составляющей погрешности конечной разрядности процессора методом имитационного моделирования	180
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	184
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	185
	ПРИЛОЖЕНИЯ	188
П. 1.	Типовые законы распределения	188
П. 2.	Характеристические функции	193
П. 3.	Функции распределения	195
П. 4.	Обратные функции законов распределения	198
П. 5.	Характеристики типовых законов распределения ($P_d=0,999$)	199
П. 6.	Таблица значений коэффициента λ к критерию Колмогорова	202
П. 7.	Таблица χ^2 распределения	202
П. 8.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом нерекурсивной фильтрации	203
П. 9.	Импульсные характеристики формирующих фильтров для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданным видом корреляционных функций методом рекурсивной фильтрации	204
П.10.	Обобщенные спектральные характеристики	205
П.11.	Блок - схема автоматизированной информационной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.	207

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АЦП - аналого-цифровой преобразователь;
БРП - блок регулировки параметров;
ВУ - вычитающее устройство;
ИП - измерительный преобразователь (датчик);
К - коммутатор;
КВ - квадратор;
КФ - корреляционная функция;
МУ - масштабирующее устройство;
МУ - множительное устройство;
НКФ - нормированная корреляционная функция;
ПО - процессор обработки;
УУ - усредняющее устройство;
ФНЧ - фильтр нижних частот;
 $A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$ - алгоритм оценки вероятностной характеристики Θ ;
 $A_s \{ \epsilon(t_k) \}$ - алгоритм оценки сигнала;
 $C_x(J)$ - интервальная корреляционная функция;
 d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);
 $\hat{\sigma}_x$ - оценка дисперсии;
 $\text{ent}[\]$ - операция взятия целой части числа;
 $F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - аппроксимирующее выражение функции распределения вероятностей;
 $F\{ \}$ - функциональное преобразование полученных оценок вероятностных характеристик;
 $f_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - аппроксимирующее выражение плотности распределения вероятностей;
 $|F''(x)|_{\max}$ - максимум модуля второй производной функции распределения;
 $F_x(x)$ - функция распределения вероятностей;
 $f_x(x)$ - плотность распределения вероятностей;
 $g[\]$ - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;
 $h(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - импульсная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;
 $K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - аппроксимирующее выражение корреляционной функции;
 k_a - коэффициент асимметрии;
 k_ϵ - коэффициент эксцесса;
 K_ϕ - коэффициент формы;
 $K_x(\tau)$ - корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $K_x(t, t')$ - корреляционная функция случайного процесса;
 $K_{xy}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция;
 K_{xy} - корреляционный момент;

$L_k(\tau, \alpha)$ - ортогональная функция Лагерра k -го порядка;
 $M[\]$ - оператор математического ожидания;
 M_0 - мода;
 M_e - медиана;
 $\hat{\mu}_x$ - оценка математического ожидания;
 β_j - частота попадания анализируемой случайной величины в j -ый дифференциальный коридор;
 $P_x(\tau)$ - полярная (знаковая) корреляционная функция;
 $R_x(\tau)$ - релейная корреляционная функция;
 S_d - оператор усреднения;
 Signu - знаковая функция;
 $S_{xH}(\omega)$ - нормированная спектральная плотность мощности процесса $\dot{x}(t)$;
 $S_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности процесса $\dot{x}(t)$;
 $S_{xy}(\omega)$ - взаимная спектральная плотность мощности;
 T_ϕ - постоянная времени ФНЧ;
 $W(j\omega)$ - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;
 $W_1(j\omega)$ - частотная характеристика ФНЧ;
 $W_k(j\omega)$ - частотная характеристика фильтра Лагерра k -го порядка;
 $\bar{x}(\vec{\Theta}, t)$ - реализация случайного процесса;
 $x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса;
 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - параметры аппроксимирующего выражения;
 α_k - начальный момент k -го порядка;
 β_k - коэффициент разложения ортогонального ряда;
 χ - коэффициент вариации;
 Δ - погрешность аппроксимации;
 $\Delta\omega_\phi$ - полоса пропускания фильтра;
 δ - квадратическая погрешность аппроксимации;
 $\delta(t)$ - δ -функция Дирака;
 Δt_i - интервал дискретизации;
 δ_{ji} - индикатор состояния;
 $\Delta\omega_c$ - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;
 Δx - ширина дифференциального коридора;
 $\gamma_{см}$ - погрешность от смещенности оценки;
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$ - допустимые значения погрешностей;
 η - пикфактор;
 μ - показатель колебательности;
 μ_k - центральный момент k -го порядка;
 $\vec{\Omega}$ - вектор информативных параметров объекта исследований;

$\hat{\Theta}_j[X(t)]$ - j-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$ - t-текущая оценка вероятностной характеристики;
 $\Theta[X(t)]$, Θ - измеряемая вероятностная характеристика;
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$ - средняя оценка вероятностной характеристики;
 $\bar{\Theta}$ - вектор информативных параметров случайного процесса;
 $\hat{\Theta}[X(t)]$ - оценка измеряемой вероятностной характеристики;
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;
 $\rho_x(\tau)$ - нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;
 $\rho_x(t, t')$ - нормированная корреляционная функция случайного процесса;
 $\rho_{xy}(\tau)$ - взаимная нормированная корреляционная функция;
 ρ_{xy} - коэффициент корреляции;
 τ_k - интервал корреляции;
 τ_{kmax} - максимальный интервал корреляции.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая Вашему вниманию монография написана для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство по основам моделирования случайных процессов с заданными свойствами.

Материалы, представленные в монографии, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии автора.

Отдельные разделы монографии использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в СГТУ, СГАУ, а также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович», на естественно-математическом факультете Загребского университета, международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете.

В первом разделе, посвященном математическому описанию сигналов, приводятся основные модели случайных процессов, потоков событий, временных рядов, в том числе неэквидистантных, и их основные характеристики, используемые как при моделировании, так и оценивании вероятностных характеристик исследуемых сигналов.

Во втором разделе рассматриваются особенности моделирования некоррелированных временных рядов, случайных потоков событий, описывается разработанная автоматизированная информационная система для моделирования и оценки вероятностных характеристик сигналов.

Моделирование коррелированных временных рядов, анализ методических погрешностей генерирования рассматриваются **в третьем разделе**. В этом же разделе рассматриваются особенности генерирования некоррелированных между собой случайных процессов, имеющих заданный вид корреляционной функции, неэквидистантных временных рядов.

В четвертом разделе описываются автоматизированные информационные системы для моделирования и аппроксимативного анализа случайных процессов, а также методика и результаты имитационного моделирования временных рядов и анализа составляющей погрешности конечной разрядности процессора.

В разработке и моделировании аппаратно-программных средств на разных этапах работы принимали участие аспиранты и студенты указанных кафедр, выполнявшие под руководством автора кандидатские диссертации, курсовые и дипломные проекты: Белолипецкий В.Н., Зеленко Л.С., Дмитриева Е.В., Иванов С.Г., Крупец Н.Г., Мирзоев Р.К., Сухинин В.П., Снигерева-Давыденко Л.Б., Кудрина М.А., Новиленкова И.Ю., Козлов А.Н., Учеватов С.В., Шевченко Д., Иващенко А.В. и многие др.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры информационных систем и технологий СГАУ за обсуждение материалов мо-

нографии, критические замечания, которых по мере возможности были учтены, особенно профессору Коварцеву А.Н. и доценту Иоффе В.Г.

Большую благодарность автор выражает академику АН СССР Ильичёву В.И., профессорам Виттиху В.А., Григоровскому Б.К., Куликовскому К.Л., Кловскому Д.Д., Курочкину Е.П., Мартяшину А.И., Иванову В.Н., Рожкову В.А., Трапезникову Ю.А., Хуснутдинову Г.Н., Тельскнису Л.А. (Литва), М. Бранице (Хорватия), И. Ружичу (Хорватия), Л. Ефтичу (Хорватия), Б. Чосович (Хорватия), Д. Р. Кушину (Австралия), Ф. Вайде (Венгрия) - за обсуждение работы на различных её этапах.

Особую благодарность автор выражает своим учителям: доценту Волкову И.И., профессорам Карпову Е.М., Куликовскому Л.Ф., Самарину Ю.П., Фремке А.В., Цветкову Э.И., Б. Соучеку (Хорватия), - за постоянное внимание, консультации и особенно за то, что привели в чудесный мир теории вероятностей и случайных процессов.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность ректору СГАУ член-корреспонденту РАН, профессору Сойферу В.А. за постоянную поддержку, рецензию и неоценимую помощь при издании монографии, а также д.ф.-м.н., профессору Жданову А.И. за ценные замечания.

Неоценимую помощь в редактировании монографии оказала инженер кафедры «Информационные системы и технологии» СГАУ Муравьёва Е.В., которой автор выражает свою благодарность.

Издание монографии поддержано грантом 4 Г/2001 76/01/Б по программе «Поддержка важнейших разработок научных коллективов и отдельных учёных на основе системы грантов» по разделу «Важнейшие научные и технические разработки, соответствующие концепции социально-экономического развития Самары», за что автор выражает глубокую признательность губернатору Самарской области Титову К.А., а также президенту Самарского научного центра РАН академику РАН Шорину В.П.

И, наконец, но не в последнюю очередь, я благодарен своей семье за понимание и поддержку в работе.

Замечания и пожелания по книге, а также вопросы по информационным системам просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационных систем и технологий», декану факультета информатики, заведующему кафедрой Прохорову С.А.

E-mail: INTERNET: sp@smr.ru

ВВЕДЕНИЕ

На пути создания образцов новой техники, технологических процессов научные исследования являются первым шагом, в процессе которого исследователь открывает новые законы, закономерности, совершает научные открытия.

Научные исследования представляют собой сложный, итерационный процесс, представляющий сочетание теоретических, включая методы моделирования, и экспериментальных методов [3, 35].

Не умаляя достоинств теоретических методов исследования, значение экспериментальных методов трудно переоценить. Только с помощью эксперимента возможно получение достоверной информации об исследуемом объекте в реальном масштабе времени, после обработки которой возможно построение её модели. Открыв новый эффект, новое явление экспериментальным путем, которые невозможно объяснить на базе существующих теорий, экспериментатор стимулирует развитие фундаментальной науки. В то же время, получив новый теоретический научный результат, исследователь, с целью подтверждения основных положений новой теории, нуждается в его экспериментальной проверке.

При проведении экспериментальных научных исследований исследователь:

1. ставит задачу исследований в терминах предметной области;
2. строит модель исследуемого объекта и определяет вектор информативных параметров $\vec{\Omega}$, адекватно описывающий ее в рамках поставленной задачи;
3. с помощью технических средств осуществляет измерение, регистрацию и обработку мгновенных значений наблюдаемых процессов $\vec{X}(\vec{\Theta}, t)$, с целью определения вектора информативных параметров $\vec{\Theta}$, описывающих модель процесса;
4. по результатам обработки информации устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Theta}$:

$$\vec{\Omega} = \Phi(\vec{\Theta}),$$

используемое для построения искомой модели объекта;

1. анализирует полученные результаты;
2. если результаты его устраивают - эксперимент окончен, в противном случае необходимо повторить пункты 3,4 (точность полученных результатов неудовлетворительна), или пункты 2-4 (вектор параметров $\vec{\Omega}$ не полно описывает поведение объекта), а иногда и пункты 1-4 (ставится другая задача).

Следует отметить, что задачи 1, 2 и 4, 5, как правило, решает специалист данной предметной области, формулируя и интерпретируя ее в терминах предметной области, а 3 задачу - специалисты в области измерения и обработки измерительной информации.

Такое разделение функций между исследователем и специалистом в области измерения и обработки измерительной информации позволяет последнему абстрагироваться от конкретных физических объектов и вектора физических параметров $\vec{\Omega}$ и непосредственно перейти:

1. к математическому описанию исследуемых процессов и определению вектора параметров $\vec{\Theta}$, достаточных для решения поставленной задачи;
2. сбору информации с помощью первичных преобразователей;
3. оценке вектора параметров $\vec{\Theta}$ с помощью технических средств;
4. анализу точности полученных результатов;

5. аппроксимации полученных функциональных зависимостей с помощью параметрических моделей.

Каждая из перечисленных задач имеет свои специфические особенности, а эффективность решения четвертой и пятой - зависит от применяемых технических средств, построенных, как правило, на базе современных средств информационно-измерительной и вычислительной техники.

Основной подсистемой любого технического средства, предназначенного для получения и обработки измерительной информации: автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), информационно-измерительных систем (ИИС), процессорных измерительных систем (ПРИС), - является измерительно-вычислительный канал.

Под **измерительно-вычислительным каналом** понимается совокупность аппаратно-программных средств, предназначенных для измерения мгновенных значений соответствующей физической величины, обработки результатов измерения и представления конечных результатов в форме, удобной для дальнейшего использования.

Рассмотрим структуру отдельного измерительно-вычислительного канала.

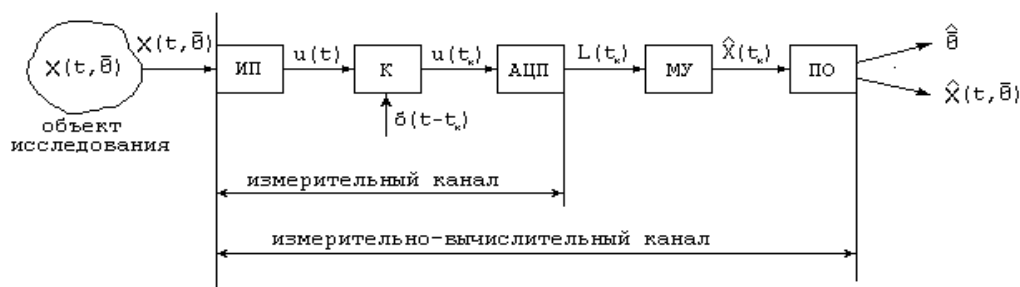


Рисунок В.1. Измерительно-вычислительный канал

На рис. В.1 приняты следующие обозначения.

- **ИП** - измерительный преобразователь (датчик);
- **К** - коммутатор;
- **АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;
- **МУ** - масштабирующее устройство;
- **ПО** - процессор обработки.

Рассмотрим преобразования, происходящие с сигналами в измерительно-вычислительном канале.

Независимо от природы измеряемой физической величины на выходе **ИП** получаем электрический сигнал. При этом, каждому значению физической величины ставится в соответствие вполне определенное значение электрической величины: $x(t, \vec{\Theta}) \rightarrow u(t)$.

Основным требованием, предъявляемым к **ИП**, является линейность:

$$u(t) = k x(t, \vec{\Theta}), \quad (B.1)$$

где $k = \text{const}$ - коэффициент преобразования.

Следует отметить, что если связь между $u(t)$ и $x(t, \vec{\Theta})$ нелинейная, то производят линеаризацию функции преобразования, воспользовавшись, например, методом наименьших квадратов [8].

После **ИП** исследуемый сигнал поступает на вход коммутатора.

В коммутаторе непрерывный сигнал $u(t)$ преобразуется в последовательность отсчетов, отстоящих друг от друга на интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Т.е. выполняется операция **дискретизации**:

$$u(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t-t_i) dt, \quad (B.2)$$

$$\text{где } \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases} \text{ - } \delta\text{-функция Дирака.} \quad (B.3)$$

Отметим, что при коммутации возможны два варианта:

- $\Delta t_i = \text{const}$ - регулярная дискретизация;
- $\Delta t_i = \text{random}$ - нерегулярная дискретизация.

После коммутации сигнал поступает на аналого-цифровой преобразователь, где последовательно подвергается процедурам **квантования** и **кодирования**.

Квантование - процедура отнесения непрерывного значения процесса $u(t_i)$ к ближайшему разрешенному целому уровню.

$$L(t_i) = \text{ent} \left[\frac{|u(t_i)|}{\Delta u} + \lambda \right] \text{Sign } u(t_i), \quad (B.4)$$

где - $\text{ent}[]$ - операция взятия целой части числа;

- Δu - шаг квантования по уровню;

- $\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при усечении;} \\ 0,5, & \text{при округлении;} \end{cases}$

- $\text{Sign } u = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u = 0; \\ -1, & \text{если } u < 0. \end{cases}$ - знаковая функция. (B.5)

В результате квантования сигнала получим целое число квантов, которое может кодироваться различными способами. При использовании двоичной системы счисления с весами 8-4-2-1 число двоичных разрядов, необходимых для представления $L(t_i)$ определяется выражением:

$$n = \log_2 \max |L(t_i)|. \quad (B.6)$$

Следует подчеркнуть, что в случае одноканальной системы операции коммутации и аналого-цифрового преобразования совпадают. В многоканальных же системах, как правило, применяется один коммутатор на несколько каналов.

После аналого-цифрового преобразователя сигнал поступает на вход масштабирующего устройства, выходной сигнал которого равен:

$$\mathfrak{k}(t_k) = \frac{L(t_k)\Delta u}{k}. \quad (B.7)$$

Т.е. при этом происходит обратное преобразование: приведение электрического сигнала к измеряемой физической величине.

Далее сигнал поступает в процессор обработки - устройство, реализующее тот или иной алгоритм получения оценки параметров физического процесса $x(t, \bar{\Theta})$. При этом возможны два подхода к решению задачи оценки $\bar{\Theta}$:

- в режиме экспресс-анализа с помощью алгоритма A_{Θ} оценивают вектор неизвестных параметров $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \mathfrak{k}(t_k) \}$;

- в режиме контроля и регистрации с помощью алгоритма A_s получают оценку сигнала $\mathfrak{k}(t, \bar{\Theta}) = A_s \{ \mathfrak{k}(t_k) \}$, записывают его на какой-либо промежуточный но-

ситель, а затем обрабатывают. При этом происходит задержка в обработке информации и, следовательно, в получении результата.

Первый подход будем называть **статистическими измерениями**, второй - **статистической обработкой**.

Под **статистическими измерениями** будем понимать измерение вероятностных характеристик случайных процессов с помощью специальных технических средств, работающих в реальном масштабе времени.

Под **статистической обработкой** будем понимать оценку вероятностных характеристик случайных процессов на ЭВМ, записанных на промежуточный носитель, с задержкой в обработке информации.

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **новых алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров - $\vec{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ. Появилось большое количество интересных и важных монографий и статей, посвященных методологии, планированию, конструированию и выполнению моделирования [10, 11, 20, 36, 37, 57,]. Большинство их них описывает метод, который носит название метода Монте-Карло. Современное толкование этого термина базируется на работе Неймана и Улама, выполненной в конце сороковых годов, в которой они применили специальный математический метод для решения проблемы ядерной физики, экспериментальные исследования которых очень дороги, а аналитическое решение очень сложно.

Как правило реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончания эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков представлена на рис. В.2.

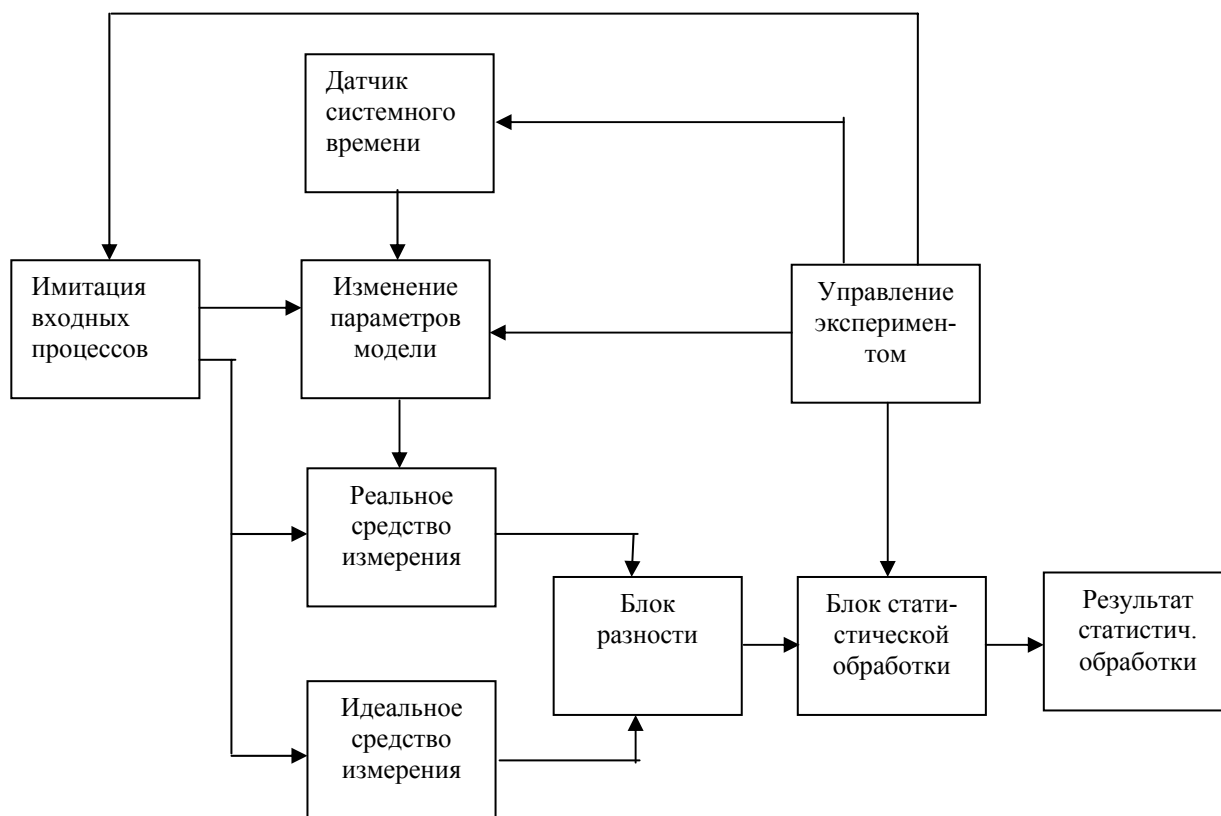


Рисунок В.2. Функциональная схема имитационного моделирования

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования автоматизированных систем для автоматизации научных исследований, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [4], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем.
- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

Достоинства блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [29], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки Θ :

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (B.8)$$

где N-число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания характеристик неэквидистантных временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации ;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;

- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

В некоторых случаях, кроме случайных сигналов, возникает необходимость в применении детерминированных образцовых сигналов.

Количество входных сигналов, одновременно обрабатываемых в модели системы, определяется сложностью системы, сложностью модели, количеством каналов и т.д. Т.е. в системе моделирования должна быть предусмотрена возможность генерирования N сигналов как с одинаковыми, так и различными характеристиками.

Отметим, что используемые в монографии термины «генерирование случайных процессов» и «моделирование случайных процессов» являются синонимами.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ

1.1. Основные понятия и определения

Источником информации об измеряемой физической величине является электрический сигнал $x(t, \bar{\Theta})$, где $\bar{\Theta}$ - вектор неизвестных параметров, подлежащий определению с помощью специальных технических средств. Состав этого вектора зависит от класса решаемой задачи и определяется в каждом конкретном случае. Сигналом или процессом считается любая функция времени. При фиксированном моменте времени $t = t_i$ получим мгновенное значение измеряемой величины $x(t_i, \bar{\Theta})$. В зависимости от характера этой величины: **детерминированной** или **случайной**, - исследуемые процессы можно разделить на два класса: **детерминированные**, **случайные** процессы (сигналы).

Детерминированным является такой сигнал, который представляет собой известную функцию времени.

Для детерминированного сигнала, задав модель и числовые значения её параметров, можно определить его мгновенное значение для любого произвольного момента времени, например (см. рис. 1.1):

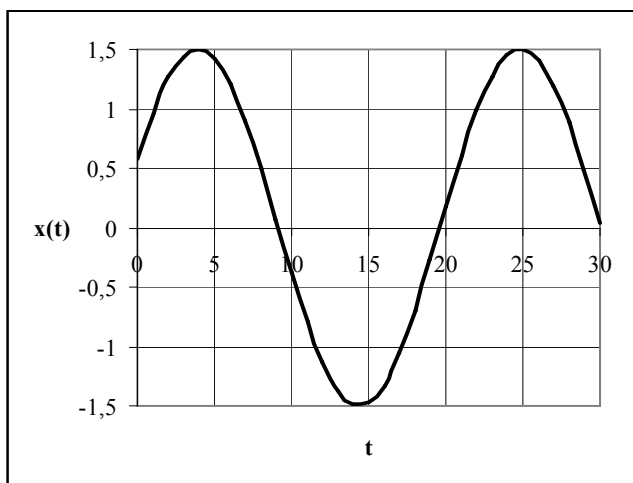


Рисунок 1.1.

$$x(t, \bar{\Theta}) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.1)$$

где $\bar{\Theta} = [A_m, \omega_0, \varphi]$ - вектор параметров модели.

В свою очередь, детерминированные сигналы делятся на непрерывные и импульсные. Непрерывные сигналы характеризуются тем, что в заданном диапазоне изменения они могут иметь бесконечное число значений. Для непрерывных сигналов справедливо следующее утверждение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} x(t) = x(t_0). \quad (1.2)$$

Импульсные сигналы существуют на ограниченном интервале времени

$$x(t) = h(t)1(t_1 < t < t_2), \quad (1.3)$$

где $h(t)$ - функция, описывающая форму импульса;

$T_u = t_2 - t_1$ - длительность импульса.

$$1(0 < t < T_u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t < T_u; \\ 0, & \text{если } t > T_u; \end{cases} \quad \text{- единичная функция} \quad (1.4)$$

На рис. 1.2 приведен пример импульсного сигнала, представляющего собой выходной сигнал фильтра с импульсной характеристикой

$$h(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left(\cos\omega_0 t + \frac{\sqrt{1+T^2\omega_0^2}-1}{T\omega_0} \sin\omega_0 t \right) \quad (1.5)$$

при подаче на его вход сигнала в виде δ -функции:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = 0; \\ 0, & \text{если } t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \quad (1.6)$$

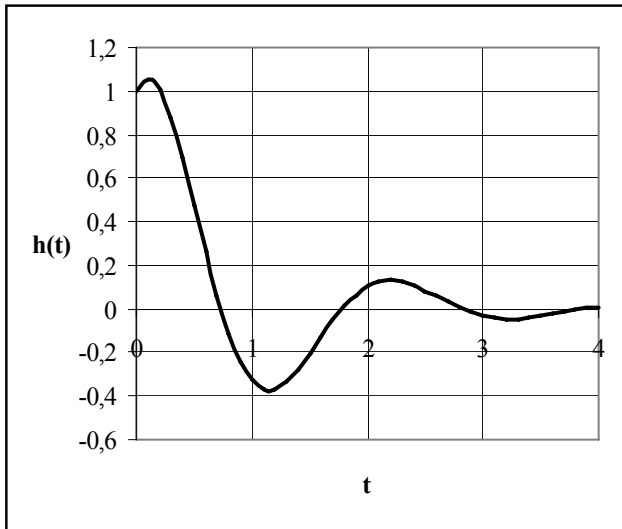


Рисунок 1.2.

Кроме того, детерминированные сигналы делятся на периодические и непериодические (единичные).

Периодическим называется процесс, для которого справедливо следующее свойство (см. рис.1.1):

$$x(t+nT) = x(t) \mathbb{1}(t < T) \quad (1.7)$$

где T - период процесса, $n = 1, 2, \dots$

Для периодических импульсных сигналов характерно, что:

$$x(t+nT) = x(t) \mathbb{1}(0 < t < T) = h(t) \mathbb{1}(0 < t < T_u), \quad (1.8)$$

где T - период следования импульсов;
 T_u - длительность импульса.

На рис. 1.3. приведены примеры импульсных периодических сигналов, представляющие собой выходной сигнал генератора импульсов (рис. 1.3.а)), поток регулярных событий (точечный поток), поступающих, например, на вход информационно-измерительной системы (рис. 1.3. б)).

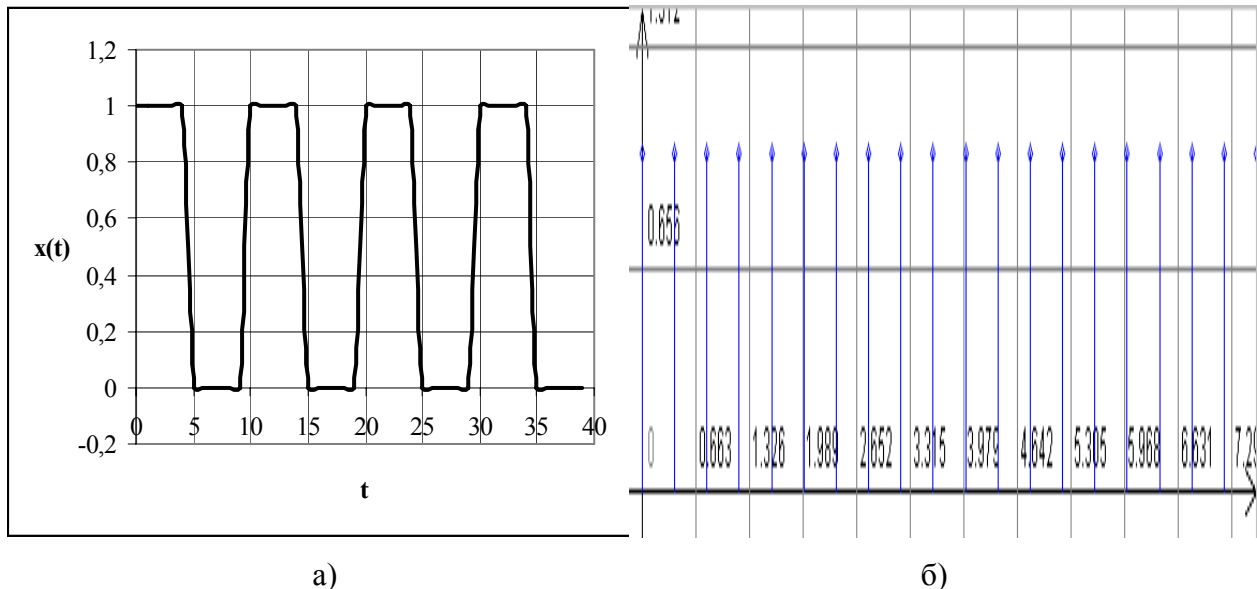


Рисунок 1.3.

Как правило, в процессе исследования определяются не все параметры, входящие в модель, а только те из них, которые необходимы для решения задачи.

Основные параметры детерминированных сигналов приведены в таблице 1.1.

Параметры детерминированных сигналов

Таблица 1.1

№	Название параметра	Определение
1	среднее значение	$X_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$
2	действующее значение	$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}$
3	амплитудное значение	X_m - наибольшее значение измеряемого сигнала-
4	коэффициент амплитуды	$k_a = \frac{X_m}{X}$
5	коэффициент формы	$k_{\text{TM}} = \frac{X}{X_{-p}}$
6	период сигнала	T - минимальный интервал времени, через который повторяется сигнал
7	частота сигнала	$f = \frac{1}{T}$
8	длительность импульса	T_u - интервал времени от момента появления импульса до его окончания
9	скважность	$Q = \frac{T}{T_u}$

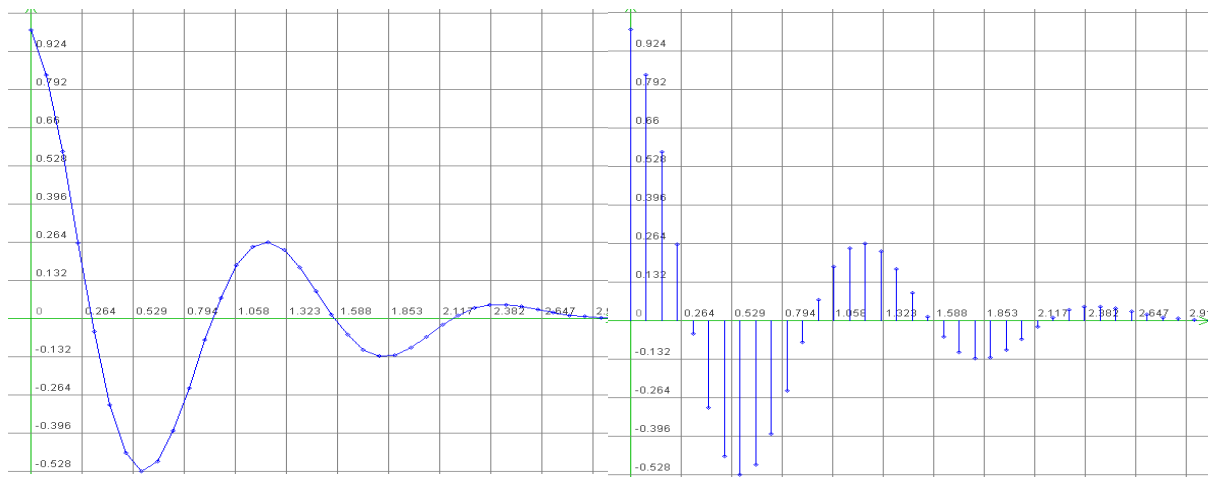
Как следует из таблицы 1.1, между амплитудным (пиковым), действующим и средним значениями существуют определенные соотношения, характеризующие форму сигнала, что даёт возможность решать задачи идентификации сигналов по измеренным значениям k_a и k_f , а также измерять действующее, среднее и амплитудные значения сигналов разной формы с помощью приборов, проградуированных, например для синусоидальных сигналов.

Детерминированный сигнал, подвергнутый аналого-цифровому преобразованию, представляет собой временную последовательность (временной ряд), члены которой отстоят друг от друга на величину интервала дискретизации Δt_0 .

На рис. 1.4 б), в качестве примера, приведена реализация временного ряда импульсного сигнала, а на рис. 1.4 а) - непрерывная реализация того же сигнала.

Случайными называются процессы, численные значения которых невозможно определить (вычислить) для любого заданного момента времени. Отдельное наблюдение случайного процесса называется его **реализацией**. На рис. 1.5 приведен пример реализации случайного процесса.

При фиксации момента времени t_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ получаем случайную величину.



а) б)
Рисунок 1.4. Реализация импульсного сигнала

Введем следующие обозначения: $X(t)$ - случайный процесс; $x_j(t)$ - j -я реализация процесса $X(t)$; $x_j(t_i)$ - мгновенное значение процесса $X(t)$, соответствующее значению j -й реализации в i -й момент времени.

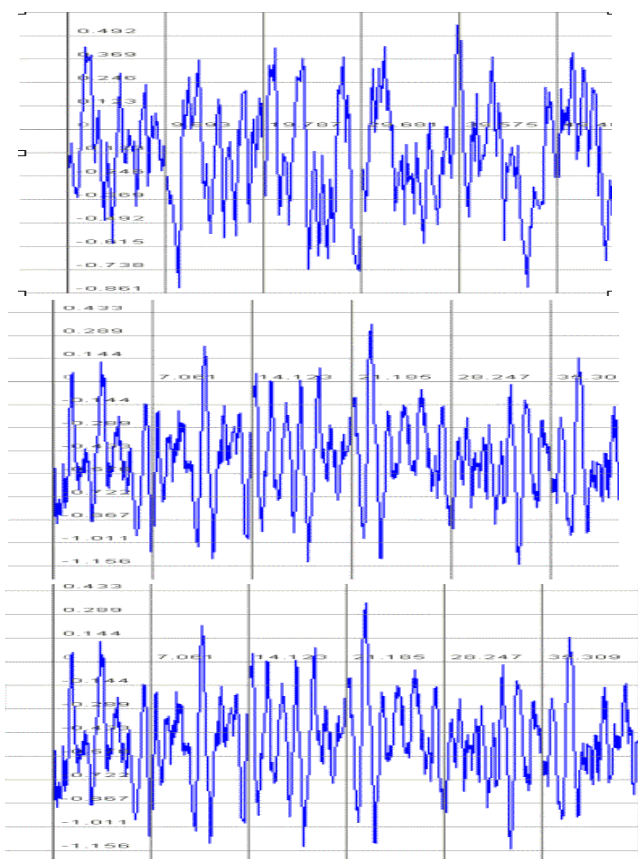


Рисунок 1.5. Реализация случайного процесса

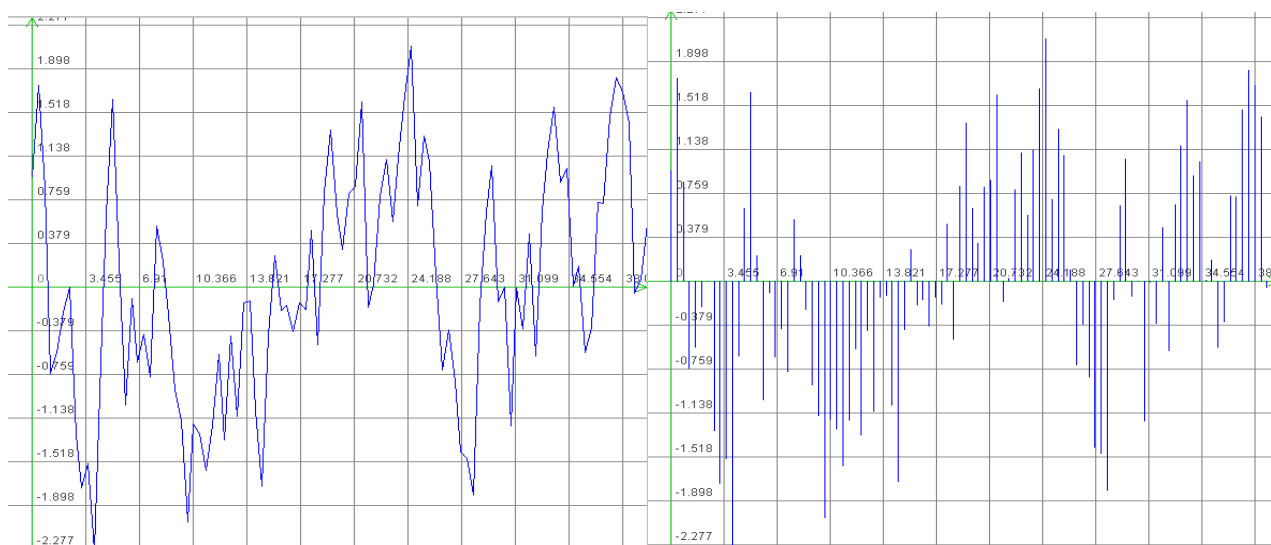
Совокупность мгновенных значений, соответствующих значениям различных реализаций в один и тот же момент времени t_i , назовем i -й последовательностью процесса $X(t)$ и обозначим $x(t_i)$.

Отсюда следует, что в качестве аргументов случайного процесса выступают **время и номер реализации** [53]. Хотя между этими координатами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что время может быть как непрерывным, так и дискретным, а номер реализации принимает только целочисленные значения, в теоретико-вероятностном плане они равноправны.

Следовательно, возможны два подхода к изучению свойств случайных процессов: первый, основанный на анализе множества реализаций, и второй, оперирующий множеством последовательностей.

Для каждого случайного процесса могут быть установлены область определения $T \times N$ и область существования X : $t \in T$, $j \in N$ и $x \in X$. При этом T и X могут быть непрерывными, дискретными или смешанными, N - только дискретной [53].

Пример реализации дискретного случайного процесса (временной последовательности, временного ряда), имеющего в заданном диапазоне изменения ограниченное число значений, уровней, представлены на рис. 1.6 б). На рис 1.6 а) представлена соответствующая ему реализация случайного процесса.



а) б)
Рисунок 1.6. Реализации случайного процесса и временного ряда

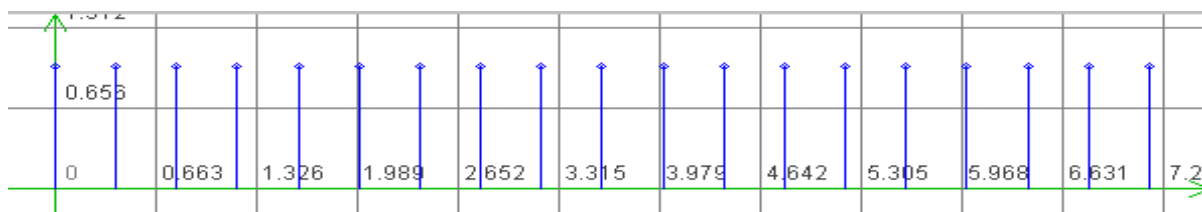
В процессе измерения интерес могут представлять как мгновенные значения $x_j(t_j)$, так и сами моменты измерения t_{ji} - потоки событий.

Под **потоком событий** будем понимать временную последовательность, характеризующую моментами наступления отдельных событий, независимо от природы этих событий.

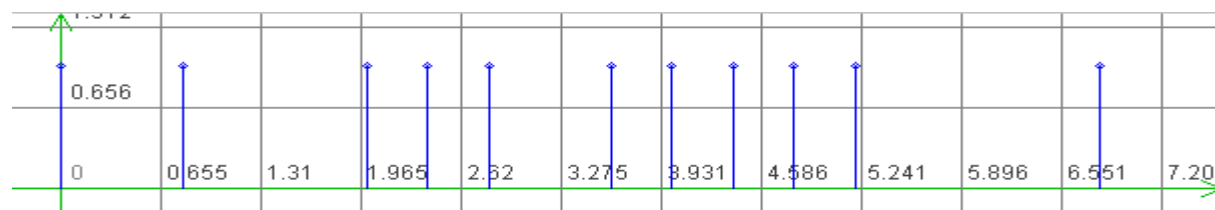
При этом можно выделить два случая:

- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{const}$ – регулярный (периодический) поток (см.рис. 1.7 а));
- $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \text{random}$ нерегулярный (апериодический) поток (см. рис. 1.7

б)).



а) Регулярный поток



б) Нерегулярный поток

Рисунок 1.7. Реализации потоков событий

При решении самых разнообразных научно-технических задач исследователю приходится сталкиваться с ситуациями, когда исследуемый процесс $X(t)$ представлен **неэвидистантным временным рядом**

$$\left[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji}) \right]_{j=1, \dots, M_j}^{i=1, \dots, M_j}, \text{ где } \Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random}.$$

Заметим, что индекс i в этом случае характеризует лишь место отсчёта или метки времени в массивах, где хранятся входные данные, а не характеризует время наступления события. Примеры реализаций неэвидистантных временных рядов приведены на рис. 1.8.

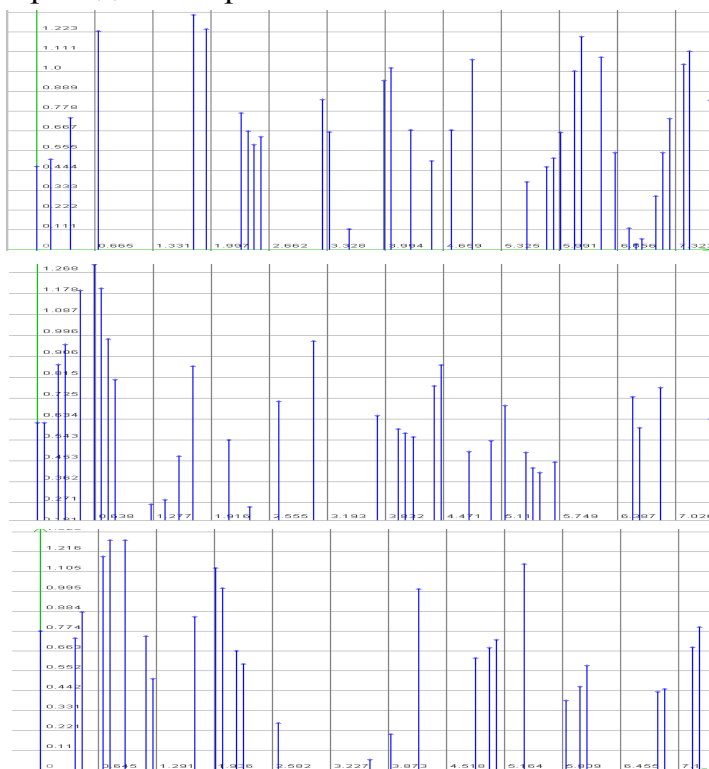


Рисунок 1.8. Примеры реализаций

Выделим восемь классов важнейших процессов, которые встречаются на практике при решении самых разнообразных задач:

1. детерминированные процессы - $\varphi(t)$;
2. случайные процессы - $X(t)$;
3. детерминированные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами $T = \text{const} - \varphi(iT)$;
4. случайные последовательности с регулярными интервалами времени между отсчетами $\Delta t_0 = \text{const} - X_j(i\Delta t_0)$, где j - номер реализации;
5. детерминированные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - \varphi_j(t_i)$;

6. случайные последовательности со случайными интервалами времени между отсчетами $\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji} = \text{random} - X_j(t_i)$;

7. регулярный поток событий - $\delta(t-T_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = T_i \\ 0, & \text{если } t \neq T_i \end{cases}$;

8. случайный поток событий - $\delta(t-t_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = t_i \\ 0, & \text{если } t \neq t_i \end{cases}$, где $t_i = \text{random}$;

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как, с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов дает возможность построить более сложные модели процессов, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

1.2. Математическое описание случайных величин

Основой для математического описания случайных процессов и потоков событий является математическое описание случайных величин.

Для описания случайных величин в практических приложениях наиболее часто применяются [12]:

- законы распределения случайных величин;
- числовые характеристики законов определения.
- характеристические функции, -

обладающие различной степенью полноты описания.

Законом распределения называется функциональная зависимость, устанавливающая связь между возможным значением случайной величины и вероятностью появления этого значения.

Законы распределения записываются в виде:

- функции распределения вероятности - $F_x(x) = P(X < x)$;
- плотности распределения вероятности - $f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$.

Приведем основные свойства законов распределения (см. табл 1.2).

Таблица 1.2

	$f_x(x)$	$F_x(x)$
1	$f_x(x) \geq 0$	$F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$
2	$P(x < X < x+dx) = f_x(x)dx$	$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$
3	$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$	$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x)dx$
4	$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$	$F_x(\infty) = 1$
5	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_x(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = 0$	$F_x(-\infty) = 0$

Аналитические выражения наиболее часто встречающиеся законов распределения вероятности приведены в приложении П.1.

Законы распределения дают исчерпывающее описание случайной величины. Однако для их экспериментального определения требуется большой объём данных и, следовательно, большие материальные затраты. В большинстве же практических случаев для описания случайных величин применяют приближенные методы, основанные на знании числовых характеристик.

К числовым характеристикам относятся: начальные и центральные моменты k -го порядка, мода, медиана, коэффициенты вариации и формы, пикфактор и т.д.

• Начальным моментом k -го порядка называется величина, определяемая выражением:

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx, \quad (1.9)$$

где $M[]$ - операция нахождения математического ожидания.

Из начальных моментов наиболее часто применяются:

- $\alpha_1 = M[X] = m_x$ - математическое ожидание, характеризующие среднее значение оцениваемой случайной величины;

- $\alpha_2 = M[X^2]$ - определяющий мощность случайной величины.

• Центральные моменты k -го определяются в виде:

$$\mu_k = M[\overset{\circ}{X}^k],$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ - центрированная случайная величина.

Из них наиболее часто применяются:

- $\mu_2 = \sigma_x^2$ - дисперсия процесса, характеризующая разброс значений случайной величины относительно математического ожидания;

- $\mu_3 = M[\overset{\circ}{X}^3]$ - характеризует симметричность закона распределения. Для

устранения зависимости μ_3 от дисперсии вводят коэффициент асимметрии: $K_a = \mu_3 / \sigma^3$;

- $\mu_4 = M[\overset{\circ}{X}^4]$ - характеризует островершинность закона распределения. В

качестве базового закона (закона сравнения) был выбран нормальный закон, для которого $\mu_4 = 3\sigma_x^4$. Для удобства сравнения ввели понятие коэффициент эксцесса:

$$K_\varepsilon = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3.$$

Моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса применяются при решении самых разнообразных прикладных задач, например:

- упрощенном описании случайной величины;

- идентификации закона распределения случайной величины с использованием кривых Пирсона [12];

- построении аналитического выражения закона распределения в виде ряда Грамма-Шарлье по той или иной системе ортогональных функций, например: Эрмита, Лежандра и т. д. [21];

- определении динамического диапазона случайной величины.

• Мода - M_o - наиболее вероятное значение случайной величины X , определяемое в результате решения уравнения:

$$f'_x(x) = 0. \quad (1.10)$$

• Медиана - M_e - определяется из уравнения

$$P\{x < M_e\} = 0,5 \quad (1.11)$$

и делит площадь под кривой распределения пополам.

• Коэффициент вариации $- \chi = \sigma_x / m_x$ - применяется при метрологическом анализе результатов измерения.

- Коэффициент формы - $K_\phi = M[|x|]/\sigma_x$ - характеризует форму кривой распределения и применяется, например, при оценки релейной корреляционной функции [24]/

- Пикфактор - $\eta = |x_{\max}|/\sigma_x$ - применяется при оценки динамического диапазона случайной величины.

Значения числовых характеристик для типовых законов распределения приведены в приложении П.1.

При решении разнообразных задач полезной характеристикой случайной величины является её характеристическая функция - математическое ожидание комплексной случайной величины e^{iux} , рассматриваемое как функция параметра u [21]:

$$\phi_x(u) = M[e^{iux}]. \quad (1.12)$$

Так как $|e^{iux}| = 1$ при любых действительных u и x , то вследствие основного свойства плотности вероятности характеристическая функция при любом действительном значении u не превосходит по модулю единицы и равна единице при $u = 0$.

Характеристическая функция и плотность распределения вероятности случайной величины связаны парой взаимно обратных преобразований Фурье [21]:

$$\phi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f_x(x) dx; \quad (1.13)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \phi_x(u) du. \quad (1.14)$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины также является её полной вероятностной характеристикой.

Примеры характеристических функций для типовых законов распределения приведены в приложении П.2.

Зная характеристическую функцию, можно просто определить начальные и центральные моменты случайной величины [21]:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \phi_x^{(k)}(0), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (1.15)$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} [\exp(-i u m_x) \phi_x(u)]_{u=0}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (1.16)$$

1.3. Функции случайных аргументов

При решении разнообразных практических задач часто возникает необходимость в определении закона распределения случайных величин, представляющие собой функции некоторых других случайных величин, имеющих известные законы распределения [21].

Пусть случайная величина Y представляет собой однозначную функцию случайной величины X :

$$y = g(x). \quad (1.17)$$

Задача состоит в определении плотности распределения вероятности $f_y(y)$ по известной плотности распределения вероятности $f_x(x)$.

Вероятность того, что значение ξ заключено в промежутке $x, x + dx$, должна быть равна (вследствие однозначной связи между X и Y) вероятности того, что значение η заключено в соответствующем промежутке $y, y + dy$ [21]

$$P(x < \xi < x+dx) = P(y < \eta < y+dy). \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) представим в виде (см. табл. 1.2)

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что

$$f_y(y) = f_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (1.20)$$

Производную необходимо брать по абсолютному значению, так как плотность распределения всегда неотрицательна. Подставив вместо x в выражение (1.20) обратную функцию $x = \varphi(y)$, окончательно получим

$$f_y(y) = f_x[\varphi(y)] \left| \frac{d}{dx} \varphi(y) \right|. \quad (1.21)$$

Если функция $x = \varphi(y)$ является двузначной, нужно формулу (1.21) применять дважды, т.е. к каждой ветви кривой $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$.

Если требуется определить только моментные характеристики, то задачу можно решить, не определяя плотности распределения вероятности:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^k f_x(x) dx; \quad (1.22)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - m_y)^k f_x(x) dx. \quad (1.23)$$

Функция случайного аргумента применяется при моделировании псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения методом инверсного преобразования [47, 62].

1.4. Системы случайных величин

В некоторых случаях приходится рассматривать совместно несколько случайных величин. Совокупность n случайных величин x_1, x_2, \dots, x_m удобно рассматривать как одну m - мерную векторную случайную величину, составляющие которой являются величины x_1, x_2, \dots, x_m .

Часть вероятностных характеристик, описывающих n - мерную случайную величину, по смыслу совпадают и являются обобщением соответствующих характеристик одномерной случайной величины. Другая часть характерна только для векторных случайных величин - условные функции и плотности распределения вероятности [40].

К ним относятся:

- функции и плотности распределения вероятности;
- условные функции и плотности распределения вероятности;
- характеристическая функция;

- начальные моменты $r + s$ порядка случайного вектора -

$$\alpha_{rs} = M[x^r y^s];$$

- центральные моменты $r + s$ порядка случайного вектора -

$$\mu_{rs} = M\left[\overset{\circ}{x}{}^r \overset{\circ}{y}{}^s \right].$$

Рассмотрим все характеристики на примере системы, состоящей из двух случайных величин.

Функцией распределения двумерного случайного вектора с составляющими X и Y или совместной функцией распределения двух случайных величин называется вероятность совместного выполнения неравенств $X < x$, $Y < y$, рассматриваемая как функция двух переменных [40]:

$$F(x, y) = P\left(\begin{array}{l} X < x \\ Y < y \end{array} \right). \quad (1.24)$$

Плотностью вероятности случайного вектора (X, Y) или совместной плотностью вероятности двух случайных величин X и Y называется предел отношения вероятности попадания его конца в бесконечно малую область к площади этой области при стягивания этой области в точку:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\left(\begin{array}{l} x \leq X < x + \Delta x \\ y \leq Y < y + \Delta y \end{array} \right)}{\Delta x \Delta y}. \quad (1.25)$$

Зная плотность распределения вероятностей, можно определить функцию распределения случайного вектора:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.25) можно получить выражение плотности распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) через его функцию распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.27)$$

На практике часто приходится находить закон распределения одной случайной величины X при условии, что случайная величина Y примет определенное значение y . Этот закон называют условным законом распределения. На основании теоремы умножения плотностей вероятностей [12] совместная плотность вероятности двух случайных величин равна плотности вероятности одной из них, умноженной на условную плотность вероятности другой относительно первой:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y/x) = f_2(y) f_1(x/y). \quad (1.28)$$

Отсюда

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}. \quad (1.29)$$

Аналогично можно получить

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}. \quad (1.30)$$

Случайные величины X и Y называются **зависимыми**, если события, заключающиеся в выполнении неравенств $X < x$ и $Y < y$, зависимы хотя бы для одной пары значений x и y . В противном случае случайные величины называются **независимыми**.

Для независимых случайных величин совместная плотность распределения вероятностей равна произведению одномерных плотностей:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \quad (1.31)$$

Следовательно, с учетом выражения (1.31)

$$f_1(x/y) = f_1(x), \text{ а } f_2(y/x) = f_2(y). \quad (1.32)$$

Аналогичным образом можно определить законы распределения векторов, когда $n > 2$.

Характеристическая функция случайного вектора X определяется выражением:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = M [\exp\{i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)\}]. \quad (1.33)$$

Формула показывает, что характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности распределения вероятности. Следовательно, плотность распределения вероятности определяется через характеристическую функцию обратным преобразованием Фурье [40]:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)\} \varphi(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n. \quad (1.33)$$

Для практики большое значение имеет раздел теории вероятностей, который ограничивается исследованием моментов первого и второго порядков случайных величин [10, 32]. Так моменты α_{10} и α_{01} равны математическим ожиданиям случайных величин X и Y соответственно. Для двумерного случайного вектора кроме моментов μ_{20} и μ_{02} , представляющих собой дисперсии случайных величин X и Y , существует момент μ_{11} , который называют корреляционным моментом:

$$k_{xy} = \mu_{11} = M \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ x & y \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Этот момент характеризует степень линейной связи случайных величин X и Y .

Случайные величины X и Y называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля. Случайные величины называются **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Независимые случайные величины всегда не коррелированы. Зависимые же случайные величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Следует подчеркнуть, что требование независимости величин является более жестким, чем требование некоррелированности.

На практике часто определяют нормированный корреляционный момент, который называют коэффициентом корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.35)$$

Часто при исследовании погрешностей оценки результатов оценивания той или иной вероятностной характеристики возникает необходимость в оценке моментов

высших порядков. Для системы случайных величин, распределенной по нормальному закону, моменты высших порядков определяются через моменты второго порядка [43]. Задача легко решается, если воспользоваться характеристическими функциями (см. таблицу 1.3) [62].

Следует подчеркнуть, что нечётные моменты высших порядков в этом случае равны нулю.

Моменты высших порядков

Таблица 1.3

$M[x_1^2]$	σ_1^2
$M[x_1 x_2]$	$\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$
$M[x_1^4]$	$3\sigma_1^4$
$M[x_1^2 x_2^2]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 + 2\rho_{12}^2)$
$M[x_1^3 x_2]$	$3\sigma_1^3 \sigma_2 \rho_{12}$
$M[x_1^2 x_2 x_3]$	$\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 (2\rho_{12}\rho_{13} + \rho_{23})$
$M[x_1 x_2 x_3 x_4]$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 (\rho_{12}\rho_{34} + \rho_{13}\rho_{24} + \rho_{14}\rho_{23})$
$M[x_1 x_2^2 x_3^3]$	$\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3^3 (3\rho_{13} + \rho_{12}\rho_{13} + \rho_{13}\rho_{23} + 5\rho_{12}\rho_{23} + 5\rho_{13}\rho_{23}^2)$
$M[x_1 x_2 x_3^4]$	$3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^4 (\rho_{12} + 4\rho_{13}\rho_{23})$
$M[x_1^3 x_2^3]$	$\sigma_1^3 \sigma_2^3 (9\rho_{12} + \rho_{12}^2 + 5\rho_{12}^3)$
$M[x_1^2 x_2^4]$	$3\sigma_1^2 \sigma_2^4 (1 + 4\rho_{12}^2)$
$M[x_1 x_2^5]$	$15\sigma_1 \sigma_2^5 \rho_{12}$
$M[x_1^2 x_2^2 x_3^4]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_4 (\rho_{34} + 2\rho_{23}\rho_{24} + 4\rho_{12}\rho_{14}\rho_{23} + 4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24} + 2\rho_{13}\rho_{14} + 2\rho_{14}^2 \rho_{34})$
$M[x_1^2 x_2^2 x_3^2]$	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 (1 + 2\rho_{23}^2 + 8\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} + 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{12})$
$M[x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5]$	$\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 (\rho_{23}\rho_{45} + \rho_{24}\rho_{35} + \rho_{25}\rho_{34} + 2\rho_{14}\rho_{15}\rho_{23} + 2\rho_{13}\rho_{15}\rho_{24} + 2\rho_{13}\rho_{14}\rho_{25} + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{14} + 2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{35} + 2\rho_{12}\rho_{15}\rho_{34})$
$M[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6]$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 (\rho_{14}\rho_{23}\rho_{56} + \rho_{13}\rho_{24}\rho_{56} + \rho_{23}\rho_{15}\rho_{46} + \rho_{13}\rho_{25}\rho_{46} + \rho_{23}\rho_{16}\rho_{45} + \rho_{13}\rho_{26}\rho_{45} + \rho_{14}\rho_{25}\rho_{36} + \rho_{24}\rho_{15}\rho_{36} + \rho_{14}\rho_{26}\rho_{35} + \rho_{16}\rho_{24}\rho_{35} + \rho_{15}\rho_{26}\rho_{34} + \rho_{35}\rho_{46}\rho_{12} + \rho_{16}\rho_{25}\rho_{34} + \rho_{36}\rho_{45}\rho_{12} + \rho_{12}\rho_{34}\rho_{56})$

1.5. Математическое описание случайных сигналов

Если рассматривается j -я последовательность случайного процесса, то мгновенное значение произвольной реализации в момент t_i , будет случайной величиной с плотностью распределения вероятности $f_x(x/t_i)$. При фиксации номера реализации случайной будет мгновенное значение в произвольный момент времени. Плотность распределения вероятности - $f_x(x/j)$.

Плотности распределения вероятности $f_x(x/j)$ и $f_x(x/t_i)$ позволяют определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику соответствующей случайной величины [40].

Случайные процессы исчерпывающе описываются многомерной функцией распределения вероятности соответствующей мерности.

Так, например, если $t_i \in T = \{t_i\}_{i=1, 2, \dots, m}$, то используется m -мерная плотность распределения вероятностей $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$. По известной m -мерной плотности распределения вероятности можно определить любую числовую или функциональную вероятностную характеристику $\Theta[x(t_i)]_{i=1, 2, \dots, m}$ случайной последовательности, если эта характеристика может быть представлена как результат некоторого преобразования функции $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m / t_1, t_2, \dots, t_m)$.

На основании общей теории статистических измерений [53] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (1.36)$$

где Θ - измеряемая вероятностная характеристика;

S_d - оператор идеального усреднения;

d - параметр усреднения (время T , совокупность реализаций N или время и совокупность реализаций TN);

g - оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики Θ ;

$x_j(t)$ - j -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (1.37)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.38)$$

3. При усреднении по времени и совокупности

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.39)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t),]_{j=1,2,\dots,N} \quad (1.40)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность, состоятельность и эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M \left[\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)] \right] = 0 \quad (1.41)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)] \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (1.42)$$

при любом ε .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

Эффективными называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [12].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (1.37)-(1.39) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (1.43)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (1.44)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (1.45)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от текущего времени и называется t -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_t$ [53]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации j , вероятностная характеристика $\Theta[X(t)]$ будет зависеть от номера реализации и называется j -текущей характеристикой $\hat{\Theta}_j$. При усреднении и по времени и совокуп-

ности значение $\Theta[X(t)]$ не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой - $\Theta_{\text{ср}}$.

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

Стационарным называются процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство $\Theta_t = \text{const}$ выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если $\Theta_j = \text{const}$, где j - номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

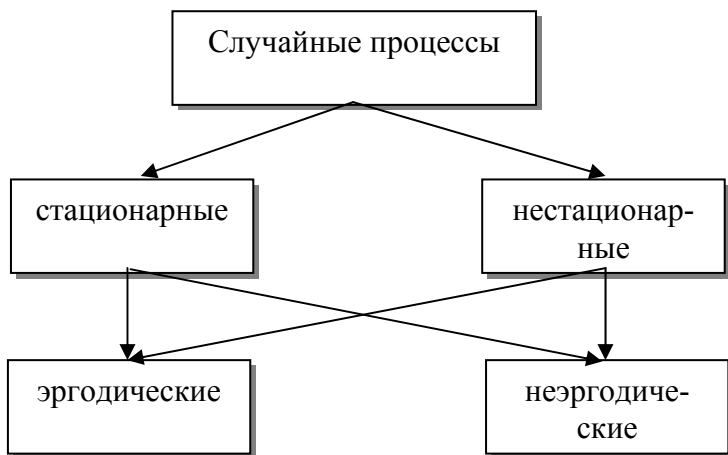


Рисунок 1.9. Классификация случайных процессов

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис.В.2):

- стационарные эргодические;
- стационарные неэргодические;
- нестационарные эргодические;
- нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание - **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять: Θ_t , Θ_j , $\Theta_{\text{ср}}$, - во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки монографии.

В [53] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса $\Theta_i = \Theta_j = \Theta_{cp}$, для стационарного неэргодического процесса $\Theta_i = \Theta_{cp}$, для нестационарного эргодического - $\Theta_j = \Theta_{cp}$, а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе S_d вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [53]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение N , M и T , т.е. объема выборочных данных.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при моделировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки с целью определения их метрологических характеристик.

Если, например, модель исследуемого процесса задать в виде:

$$x(t) = \varphi(t) + \eta(t) \overset{\circ}{x}(t), \quad (1.46)$$

где $\varphi(t)$, $\eta(t)$ - детерминированные функции времени, $\overset{\circ}{x}(t)$ - центрированный стационарный эргодический процесс,

- то в зависимости от сочетания составляющих этой модели и значения ее параметров получим следующие частные модели (см. таблицу 1.3).

Некоторые модели исследуемых процессов

Таблица 1.3

$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t)=\varphi(t)+\eta(t) \overset{\circ}{x}(t)$	Название процесса
$\varphi(t)$	0	$x(t)=\varphi(t)$	детерминированный
m_x	1	$x(t)=m_x + \overset{\circ}{x}(t)$	стационарный
$\varphi(t)$	1	$x(t)=\varphi(t)+ \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию
0	$\eta(t)$	$x(t)=\eta(t) \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по дисперсии
$\varphi(t)$	$\eta(t)$	$x(t)=\varphi(t)+\eta(t) \overset{\circ}{x}(t)$	нестационарный по математическому ожиданию и дисперсии

Приведенные модели случайных процессов не являются исчерпывающими, но часто являются достаточными при решении разнообразных прикладных задач в различных предметных областях.

Наиболее часто в качестве модели первого приближения исследователи выбирают самую простейшую модель случайного процесса - стационарный эргодический случайный процесс, - и для него определяют необходимые по смыслу задачи вероятностные характеристики. Если по какой-либо причине полученные результаты не устраивают, переходят к более сложной модели.

Для описания случайных процессов при решении разнообразных практических задач применяются:

- законы распределения, в том числе, многомерные;
- характеристические функции;
- числовые характеристики;
- характеристики взаимосвязи;
- частотные характеристики.

Классификация вероятностных характеристик, описывающих случайный процесс во временной области, представлена на рис. 1.10.



Рисунок 1.10. Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

Первые три вида характеристик подробно рассмотрены в подразделе 1.2.-1.3. и особой специфики при описании случайных процессов не имеют.

На рис.1.11 приведены реализации случайных процессов, распределенных по различным законам.

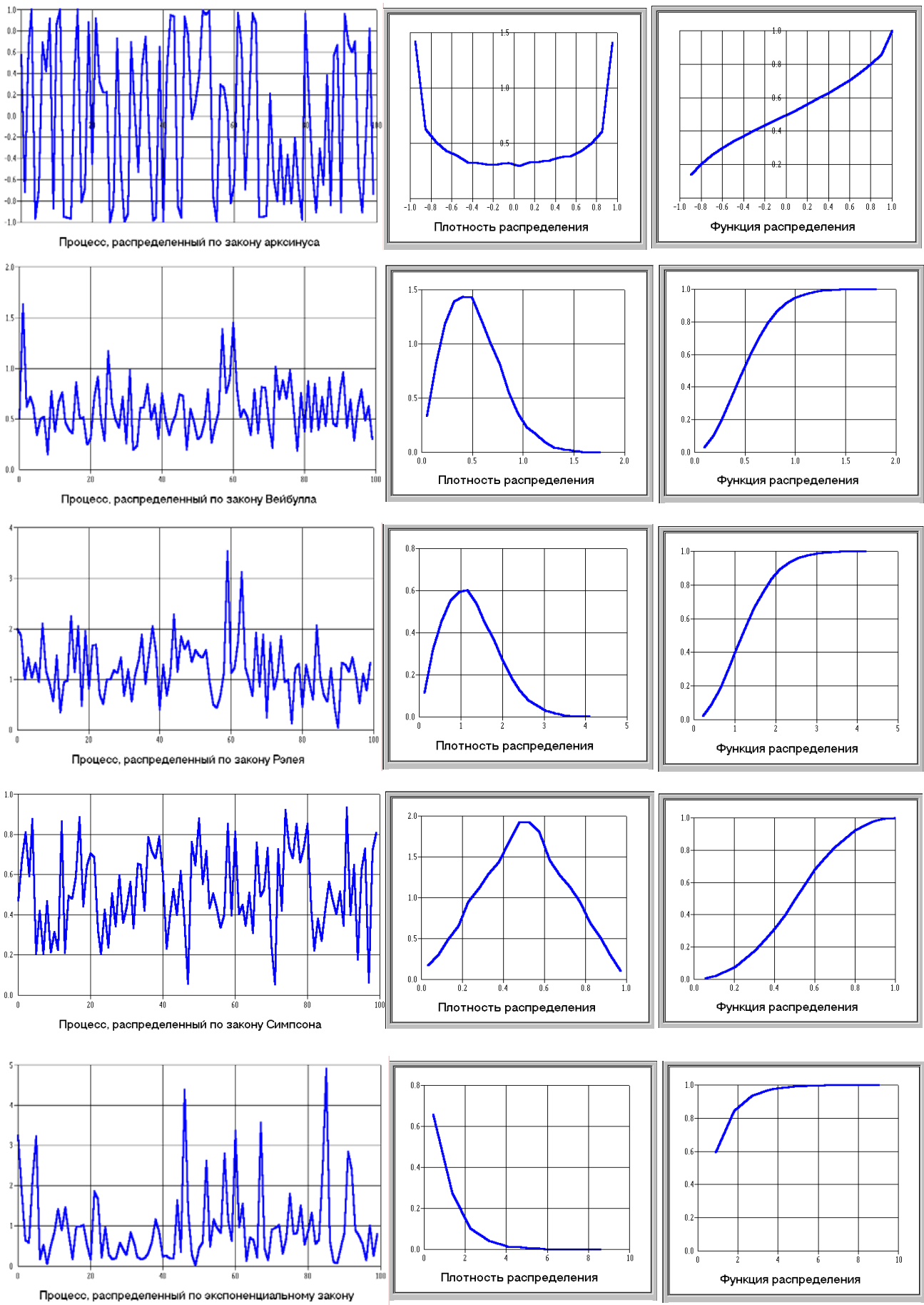


Рисунок 1.11. Реализации случайных процессов

Следует подчеркнуть аналогию вероятностных характеристик, предназначенных для описания случайных процессов, с характеристиками, описывающими детерминированные процессы (см. таблицу 1.1):

- математического ожидания m_x со средним значением x_{cp} ;
- среднеквадратического отклонения σ_x с действующим значением x ;
- пикфактора η с коэффициентом амплитуды k_a ;
- коэффициента формы случайного процесса k_ϕ с коэффициентом формы детерминированного процесса k_ϕ и т. д.

Остановимся более подробно на характеристиках взаимосвязи и частотных характеристиках.

1.6. Корреляционные характеристики

Основой характеристик взаимосвязи являются корреляционные функции [25].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента t, t' , рассматриваемый как функция t, t' [10, 32]:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t')], \quad (1.47)$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, а $m_x(t)$ - математическое ожидание случайного процесса в сечении t .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_x(t')}}. \quad (1.48)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией $\tau = t - t'$ [40]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.49)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале $[0, \infty)$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (1.48), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.50)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.51)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 1.4, а их классификация – на рис. 1.12. На рис. 1.14 приведены примеры реализаций типовых моделей стационарных эргодических случайных процессов и соответствующие им корреляционные функции.

Следует отметить, что 8-ая модель (см. таблицу 1.4) может быть корреляционной функцией только в том случае, если $|C| \leq \alpha/\omega_0$. В противном случае спектральная плотность $S_x(\omega) < 0$ (см. таблицу 1.9).

Из анализа моделей, представленных в таблице 1.4 и на рис. 1.14, видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные и колебательные.

Кроме того, из графиков видно, что для ряда моделей производная корреляционных функций в «нуле» имеет разрыв первого рода. То есть случайный процесс относится к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6, 8 таблицы 1.4).

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 1.4

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha/\tau)$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha/\tau)$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha/\tau + \alpha^2 \tau^2/3)$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \alpha/\omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
7	$e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \alpha/\omega_0 \sin \omega_0 \tau)$
8	$e^{-\alpha \tau } (C \cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0 \tau)$

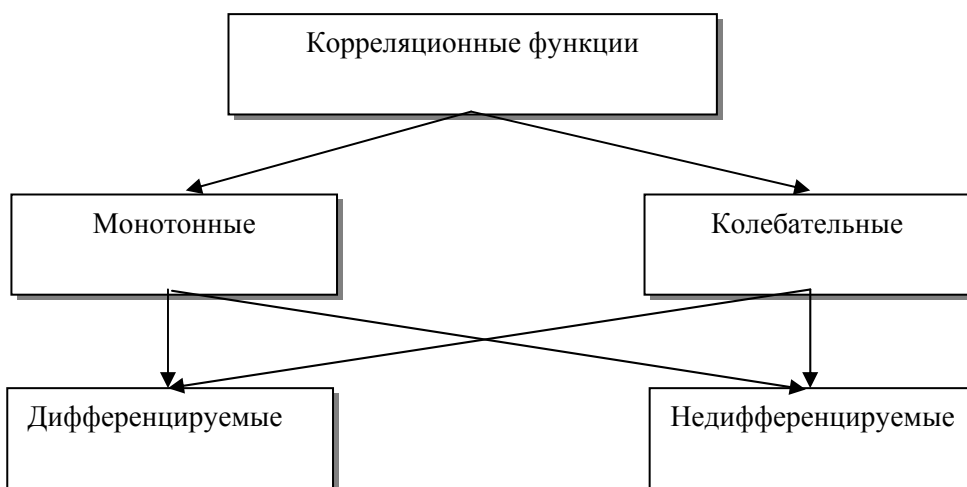


Рисунок 1.12. Классификация корреляционных функций

Пример корреляционной функции дифференцируемого случайного процесса (модель 6), при различных сочетаниях параметров: $\omega_0 / \alpha = 0, 3, 5$, - представлен на рис. 1.13.

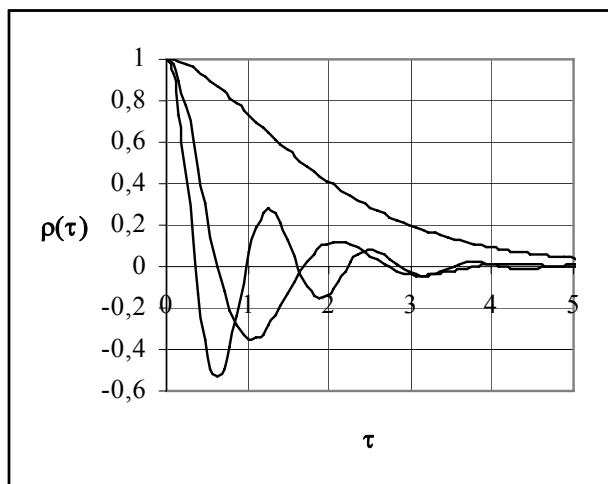


Рисунок 1.13.

Отметим, что корреляционная функция n -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (1.52)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами.

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [2].

В практических приложениях часто для описания временной зависимости нормальных стационарных процессов применяют [31]:

- релейную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = k_\phi \sigma_x \rho_x(\tau); \quad (1.53)$$

- полярную (знаковую) корреляционную функцию

$$P_x(\tau) = M \left[\text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_x(\tau). \quad (1.54)$$

По найденной релейной корреляционной функции можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{M \left[\overset{\circ}{x}(t) \right]}. \quad (1.55)$$

Отметим, что $R_x(0) = k_\phi \sigma_x$. Отсюда видно, что для оценки релейной корреляционной функции процессов, отличных от нормального, необходима априорная информация о законе распределения, т.е. необходимо знание k_ϕ .

Зная полярную корреляционную функцию, из выражения (1.54) можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} P_x(\tau). \quad (1.56)$$

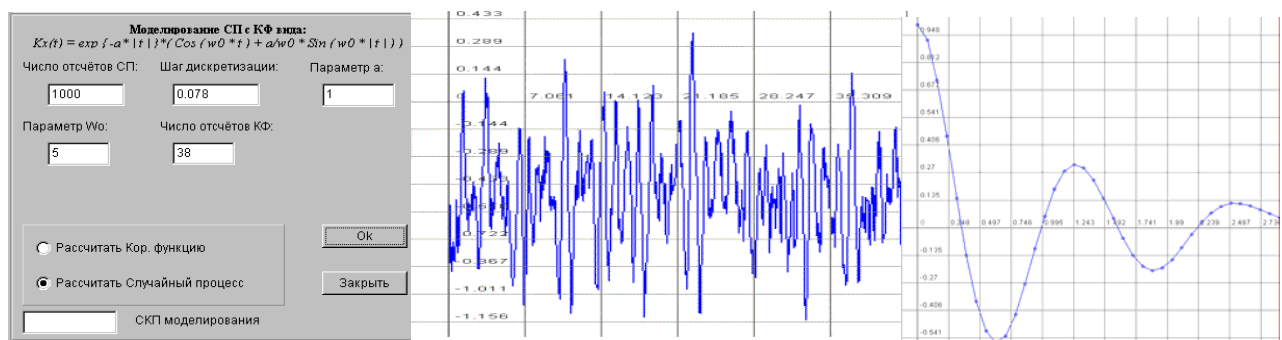
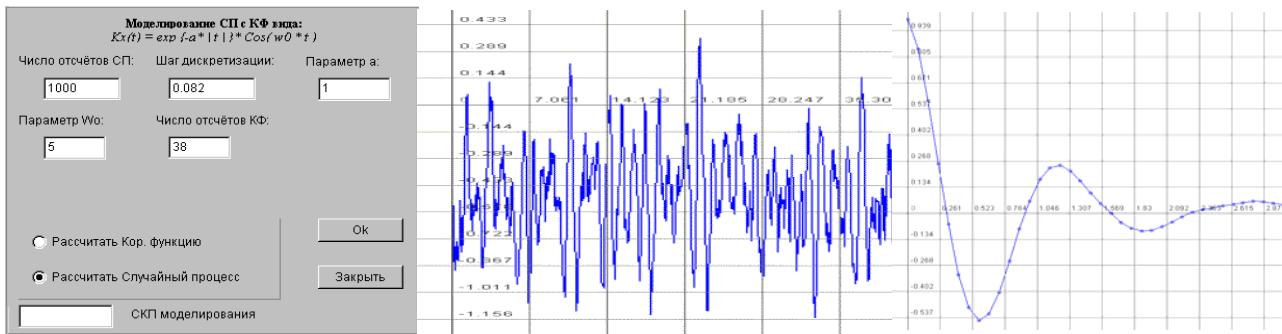
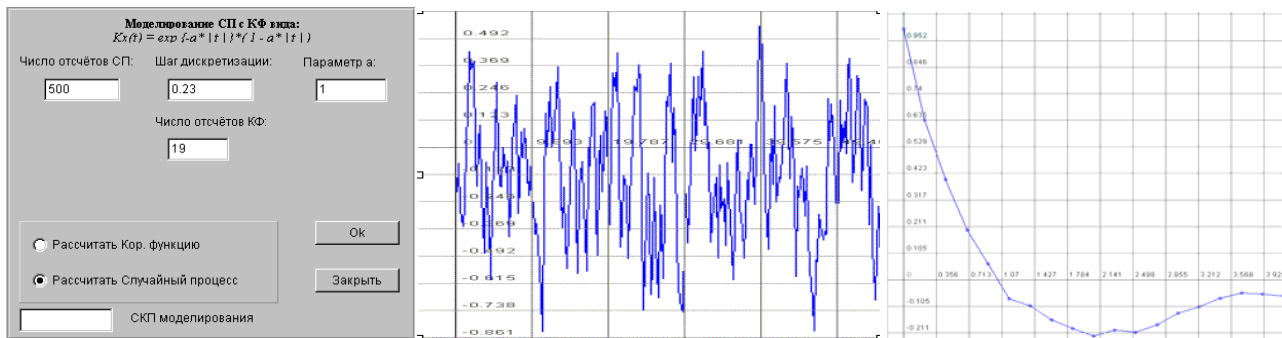
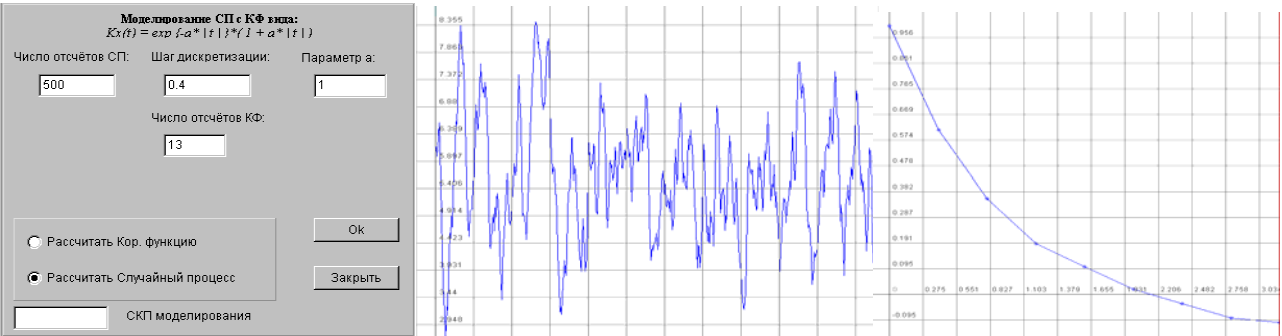
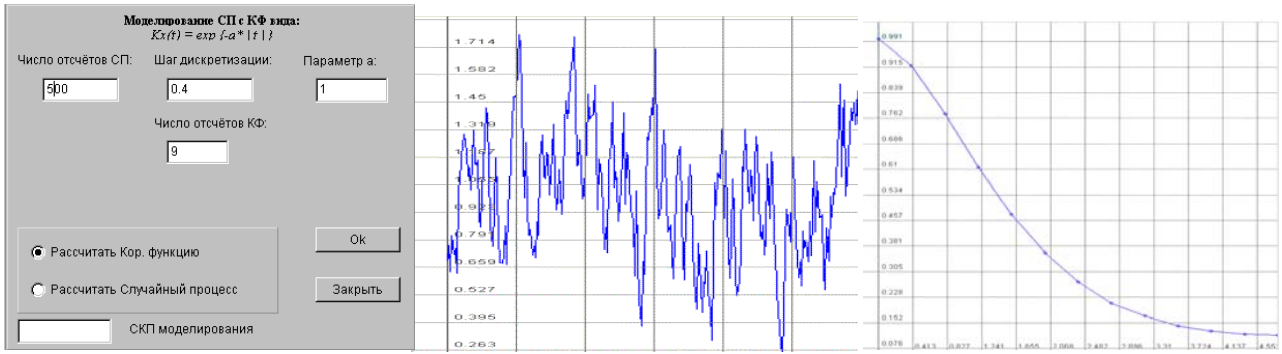


Рисунок 1.14. Случайные сигналы и их корреляционные функции

Из выражения (1.54) следует, что при оценке полярной корреляционной функции теряется информация о мощности процесса.

Несмотря на ограничения на закон распределения, релейные и полярные корреляционные функции находят широкое применение при решении различных практических задач. Это объясняется простотой технической реализации алгоритмов.

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся:

- показатель колебательности, равный числу пересечения «нуля» корреляционной функции и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Учитывая важность обобщенных корреляционных характеристик в прикладном анализе случайных процессов, рассмотрим их более подробно.

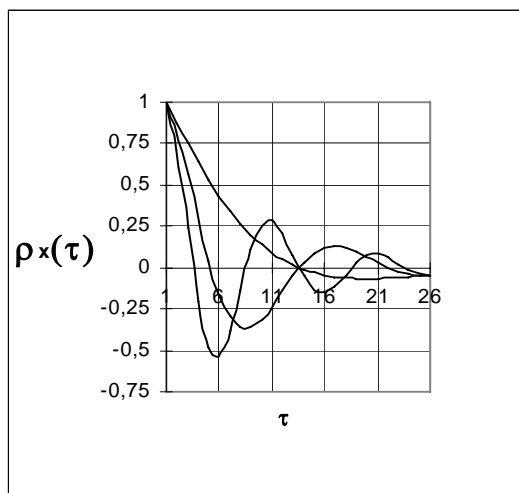


Рисунок 1.15.

Рассмотрим колебательную модель корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Введем безразмерную величину $\mu = \omega_0 / \alpha$, равную отношению частоты колебания корреляционной функции к показателю затухания и характеризующую число пересечений корреляционной функцией «нуля». Эта характеристика называется **показателем колебательности** корреляционной функции. На рис. 1.15 представлены три нормированные корреляционные функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, имеющие показатели колебательности 1, 3, 5 соответственно.

Введенный показатель колебательности оказывается очень полезной характеристикой и при исследовании других колебательных моделей корреляционных функций. Показатель колебательности, в общем случае, равен числу пересечения корреляционной функции оси τ на максимальном интервале корреляции. Учитывая, что «хвост» корреляционной функции оценивается с большей погрешностью, показатель колебательности целесообразнее определять по фазовым портретам [2]. На рис. 1.16 приведены примеры оценки показателя колебательности для различных колебательных моделей корреляционных функций. Он равен числу

пересечения фазового портрета оси τ . Заметим, что для стационарных эргодических процессов $\rho_x(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, фазовый портрет заканчивается в точке с координатами $(0,0)$.

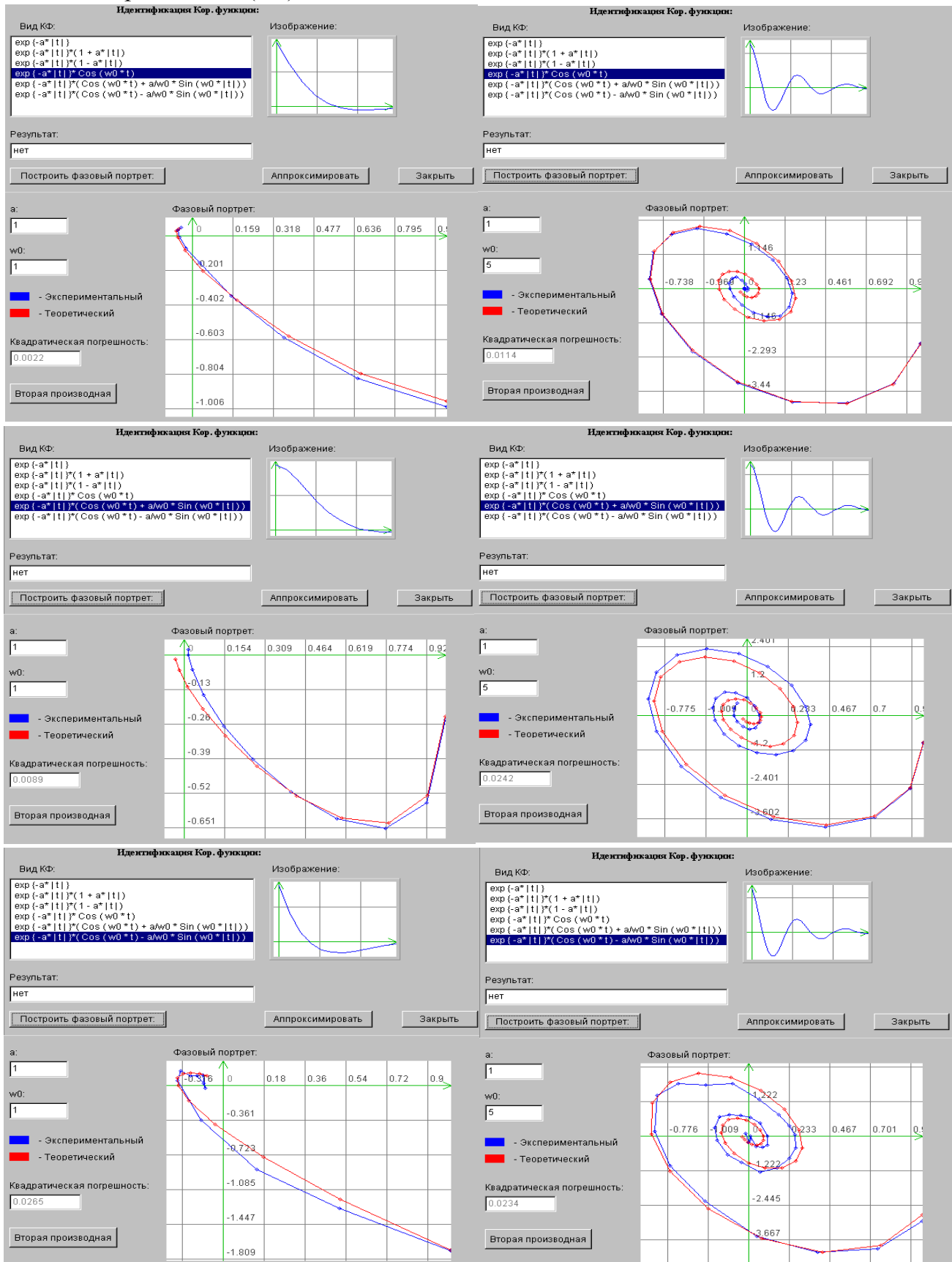


Рис. 1.16. К определению показателя колебательности

Показатель колебательности входит в аналитические выражения для определения интервалов дискретизации случайных процессов (см. таблицу 3.1), используется при идентификации случайных процессов по виду корреляционной функции, анализе методических погрешностей оценивания вероятностных характеристик и т.д. [31, 51].

Следующей корреляционной характеристикой, широко применяемой в приложениях, является интервал корреляции.

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл - **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции $\tau_k^{(1)} = \tau_{k \max}$ определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 1.5):

$$|\rho_x(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta, \quad (1.57)$$

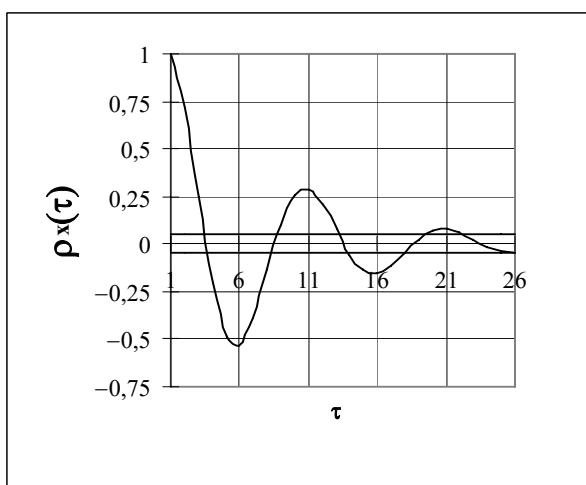


Рисунок 1.17.

где Δ заданное значение, принимаемое, как правило, равным 0,01, 0,02, 0,05.

Т.е. под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями Δ и $-\Delta$, после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора $[-\Delta, \Delta]$. На рис. 1.17 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ при $\alpha=1$, $\omega_0=5$, $\Delta=0,05$.

Аналитические выражения $\tau_{k \max}$ для типовых моделей $\rho_x(\tau)$ приведены в таблице 1.5.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.5

№	Наименование	$\Delta=0,01$	$\Delta=0,02$	$\Delta=0,05$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	$6,64/\alpha$	$5,84/\alpha$	$4,75/\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	$6,27/\alpha$	$5,40/\alpha$	$4,14/\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8,03/\alpha$	$7,14/\alpha$	$5,92/\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$4,61/\alpha$	$3,92/\alpha$	$3/\alpha$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной корреляционной функцией [43]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (1.58)$$

Отметим, что для некоторого класса процессов $\tau_k^{(2)} = 0$, что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает $\tau_{k\max} > 0$.

Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции $\tau_k^{(2)}$ целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau; \quad (1.59)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (1.60)$$

Анализ выражений (1.58) и (1.59) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции затруднена, особенно для колебательных моделей корреляционных функций. От этого недостатка свободно определение $\tau_k^{(4)}$. Поэтому, несмотря на то, что $\tau_k^{(4)}$ дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем $\tau_k^{(3)}$. Значения интервалов корреляции $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.6.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 1.6

№	Наименование	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha$	$1/2\alpha$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$2/\alpha$	$5/4\alpha$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	0	$1/4\alpha$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$8/3\alpha$	$7/4\alpha$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\alpha^2 + \omega_0^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	0	$\frac{1}{4\alpha}$

В таблице 1.7 показано, во сколько раз $\tau_{k \max}$ больше $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ ($\Delta = 0,05$).

Таблица 1.7

№	Наименование	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(2)}$	$\tau_{k \max} / \tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\alpha \tau }$	3	6
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	2,375	3,8
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	∞	16,56
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	2,22	3,38
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$3(1+\mu^2)$	$\frac{2(1+\mu^2)}{2+\mu^2}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$1,5(1+\mu^2)$	$\frac{12(1+\mu^2)}{(5+\mu^2)}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	∞	12

Отсюда видно, что $\tau_k^{(2)}$ и $\tau_k^{(4)}$ дают сильно заниженный результат по сравнению $\tau_{k \max}$.

Часто при решении различных прикладных задач используются моменты корреляционных функций, которые вводятся по аналогии с моментами законов распределения. Определим начальный момент k -го порядка в виде:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \tau^k \rho_x(\tau) d\tau. \quad (1.61)$$

Значение моментов для типовых моделей корреляционных функций приведено в таблице 1.8.

Таблица 1.8

№	Наименование	μ_1	μ_2	μ_3
1	$e^{-\alpha \tau }$	$1/\alpha^2$	$2/\alpha^3$	$6/\alpha^4$
2	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau)$	$3/\alpha^2$	$8/\alpha^3$	$30/\alpha^4$
3	$e^{-\alpha \tau } (1-\alpha \tau)$	$-1/\alpha^2$	$-4/\alpha^3$	$-18/\alpha^4$
4	$e^{-\alpha \tau } (1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$5/\alpha^2$	$16/\alpha^3$	$70/\alpha^4$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{2(\alpha^3 - 3\alpha\omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6 \frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{3\alpha^2 - \omega_0^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$\frac{8\alpha(\alpha^2 - \omega_0^2)}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^3}$	$6 \frac{5\alpha^4 - 10\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$
7	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$	$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-\frac{4\alpha}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}$	$-6 \frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega_0^2 - \omega_0^4}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^4}$

Знание моментов позволяет ввести ещё одно определение длительности существования корреляционной функции [43]:

$$\tau_k^{(5)} = \mu_1 / \mu_0. \quad (1.62)$$

По аналогии с обобщенными характеристиками для автокорреляционных функций введем обобщенные характеристики для взаимных корреляционных характеристик, широко применяемых в практических приложениях:

- максимального интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(1)} = \tau_{kmaxxy}$; (1.63)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) d\tau$; (1.64)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho_{xy}(\tau)| d\tau$; (1.65)

- интервала корреляции $\tau_{kxy}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}^2(\tau) d\tau$; (1.66)

- моменты корреляционных функций $\mu_{kxy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \rho_{xy}(\tau) d\tau$, (1.67)

используемые при решении различных прикладных задач, например, идентификации, метрологическом анализе результатов оценивания взаимных корреляционных характеристик, при определении времени задержки одного сигнала по отношению к другому и т.д.

1.7. Спектральные характеристики

Спектральные функции представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [18]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.68)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.69)$$

С учетом четности функций $K_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$, воспользовавшись формулой Эйлера, выражения (1.68), (1.69) приведем к виду:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \quad (1.70)$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega. \quad (1.71)$$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 1.9.

$K_X(\tau)$	$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3})$	$\frac{\sigma_X^2 8\alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_X^2 \alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 2\alpha\omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_X^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + C \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{\sigma_X^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + C\omega_0(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Подставив в выражение (1.71) $\tau = 0$, получим:

$$K_X(0) = \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega, \quad (1.72)$$

условие нормировки для спектральной плотности мощности.

Подставив в выражение (1.68) $\omega = 0$, получим

$$S_X(0) = \frac{\sigma_X^2}{\pi} \tau_k^{(2)}. \quad (1.73)$$

Отсюда видно, что если значение спектральной плотности мощности «в нуле» равно нулю, то $\tau_k^{(2)} = 0$. Это свойство случайных процессов ограничивает область применения интервала корреляции $\tau_k^{(2)}$.

Спектральная плотность мощности с успехом применяется при анализе линейных динамических систем при случайном входном воздействии.

Пусть на вход линейной динамической системы с частотной характеристикой $|W(j\omega)|$ поступает случайный процесс $x(t)$ со спектральной плотностью мощности $S_x(\omega)$. Спектральная плотность мощности выходного процесса $y(t)$ в этом случае равна [41]:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (1.74)$$

где $|W(j\omega)|^2$ – квадрат модуля частотной характеристики.

Это фундаментальное выражение позволяет определить:

- дисперсию выходного сигнала (см. (1.72));
- найти аналитическое выражение квадрата модуля частотной характеристики и соответствующее ему выражение импульсной переходной характеристики, необходимое для моделирования стационарных случайных процессов с заданным видом спектральной плотности мощности (корреляционной функции) методом фильтрации [62].

Аналогичным образом, воспользовавшись преобразованием Винера-Хинчина, можно определить взаимную спектральную плотность мощности исследуемых процессов:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.75)$$

Отсюда

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.76)$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не является четной, взаимная спектральная плотность мощности в общем случае является комплексной:

$$S_{xy}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) - j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (1.77)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(\omega) = \text{Re } S_{xy}(\omega) + j \text{Im } S_{xy}(\omega). \quad (1.78)$$

Воспользовавшись соотношениями (1.77)-(1.78), получим:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \text{Re } S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau d\tau, \quad (1.79)$$

а

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \text{Im } S_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau)] \sin \omega \tau d\tau. \quad (1.80)$$

Функция $C_{xy}(\omega)$ является четной, а $Q_{xy}(\omega)$ - нечетной. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega ; \quad (1.81)$$

$$K_{xy}(\tau) - K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega . \quad (1.82)$$

Для стационарно связанных процессов часто вводят нормированную меру взаимной когерентности, являющуюся функцией частоты [18, 19]:

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} . \quad (1.83)$$

Эта функция равна 0 для независимых процессов, 1 для линейно связанных процессов и находится в пределах от 0 до 1 во всех прочих случаях.

Знание спектральной плотности мощности позволяет решать самые разные прикладные задачи в различных предметных областях:

- выделение полезного сигнала на фоне шумов;
- идентификации объектов и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет найти обобщенные спектральные характеристики, широко применяемые в приложениях.

К относятся: эквивалентная ширина спектра мощности, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности, значение максимума и т.д.

Знание спектральной плотности мощности позволяет определить полосу частот, где сосредоточена основная мощность процесса. Эта характеристика называется **эквивалентной шириной спектра мощности случайного процесса** - $\Delta\omega_3$. Существуют различные способы определения $\Delta\omega_3$, приведенные, например, в [43].

Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 1.18), $\Delta\omega_3$ определяют в виде:

$$\Delta\omega_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega)_{\max}} . \quad (1.84)$$

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности ω_3 (рис. 6.18), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

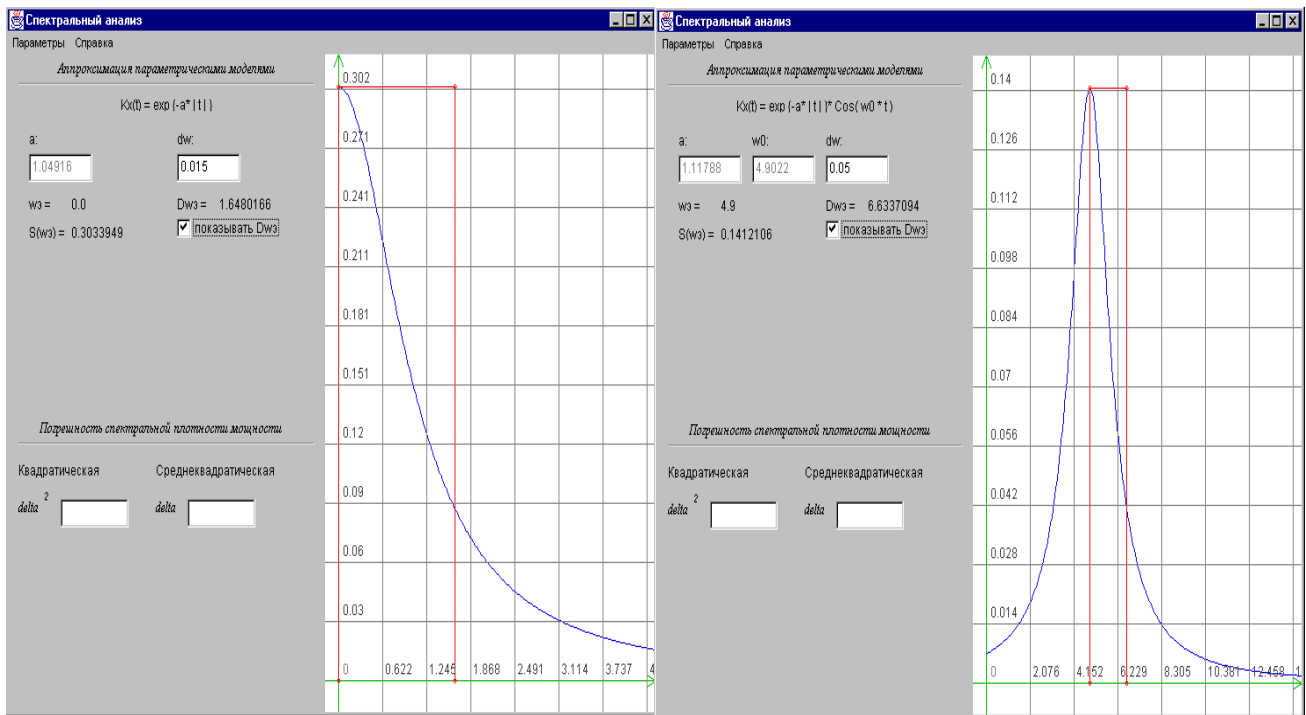
$$\Delta\omega'_3 = \omega_3 + \Delta\omega_3 / 2 . \quad (1.85)$$

В приложении 15 приведены выражения эквивалентной ширины спектра мощности случайных процессов для типовых моделей.

Воспользовавшись понятием $\Delta\omega_3$, можно получить аналитическое выражение оценки сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы, без знания конкретного аналитического выражения спектральной плотности мощности. Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы равна:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\sigma_x^2 \Delta\omega_c}{\Delta\omega_3} |W(j\omega)_{\max}|^2 , \quad (1.86)$$

где $\Delta\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{|W(j\omega)_{\max}|^2}$ - полоса пропускания линейной динамической системы.



а) Эквивалентная ширина спектра широкополосного процесса

б) Эквивалентная ширина спектра узкополосного процесса

Рисунок 1.18.

Из выражения (1.86) видно, что дисперсия выходного сигнала, независимо от вида спектральной плотности мощности случайного процесса, пропорциональна отношению эквивалентной полосы пропускания линейной динамической системы к эквивалентной ширине спектра мощности случайного процесса.

Исследования показали, что

$$\begin{cases} \Delta\omega_{\text{э}} \tau_k^{(2)} = \pi / 2; \\ \Delta\omega_{\text{с}} \tau_{\text{и}}^{(2)} = \pi / 2, \end{cases} \quad (1.87)$$

где $\tau_{\text{и}}^{(2)} = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau) d\tau}{h(\tau)_{\text{max}}}$ - длительность импульсной характеристики линейной динамической системы. Эти выражения называются **соотношениями неопределённости** для сигнала и для системы.

Воспользовавшись соотношениями неопределённости, выражение (1.86) преобразуем к виду:

$$D_y \leq \sigma_x^2 |W(j\omega)|_{\text{max}}^2 \frac{\tau_k^{(2)}}{\tau_{\text{и}}^{(2)}}. \quad (1.88)$$

Отсюда видно, что дисперсия выходного процесса линейной динамической системы, независимо от вида спектральной плотности мощности, не превышает величины, пропорциональной отношению интервала корреляции к длительности импульсной характеристики.

Таким образом, возможна оценка сверху дисперсии выходного процесса линейной динамической системы с использованием обобщенных характеристик, определенных как во временной, так и в частотных областях. Это обстоятельство значительно упрощает теоретические исследования и позволяет определить требования к системе, гарантирующие обеспечение допустимых погрешностей.

Понятие эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса позволяет разбить случайные процессы на два класса: узкополосные и широкополосные.

Узкополосным случайным процессом называется процесс, основная мощность которого сосредоточена вблизи какой-либо частоты ω_0 . Условие узкополосности записывается в виде: $\Delta\omega_y / 2 \ll \omega_0$.

Процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются **широкополосными**.

К узкополосным процессам относятся процессы, имеющие колебательную корреляционную функцию с показателем колебательности $\mu > 5$ (см. таблицу 6.8, модели 4-7).

К широкополосным процессам относятся все модели, представленные в таблице 6.8, причем, для моделей 4-7 $\mu < 5$.

Спектральные плотности мощности колебательных моделей представлены на рис. 1.19.

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость оценки частоты, соответствующей максимуму спектральной плотности мощности ω_y . Её можно определить в результате решения уравнения:

$$S'_x(\omega) = 0. \quad (1.89)$$

Результаты решения этого уравнения и $S_x(\omega_y)$, в виду громоздкости таблицы, представлены в приложении П.10.

1.8. Математическое описание случайных потоков событий

В системах реального времени обработки и передачи информации, управления наблюдаются различные потоки событий. Поток событий представляет собой точечный процесс с событиями, появляющимися случайным или периодическим образом во времени.

Различают потоки **однородных** и **неоднородных** событий. Например, в системах связи, реализующих приоритет определенной группы абонентов, поток вызовов будет с этой точки зрения неоднородным, система по-разному будет реагировать на разные события (вызовы) в потоке. На рассматриваемые же события (отсчеты первичного процесса) реакция устройств АСНИ, дискретных ИИС, как правило, не меняется при изменении порядкового номера события и поэтому поток выборок можно считать однородным [15].

Основными характеристиками, классифицирующими случайный поток, являются свойства стационарности, ординарности и последствий [15].

Стационарным называется поток событий, для которого вероятность $P_k(1-t, 1)$ появления какого-либо числа k событий на определенном интервале времени $(1-t, 1)$ зависит лишь от значения этого интервала t и не зависит от его расположения на оси времени.