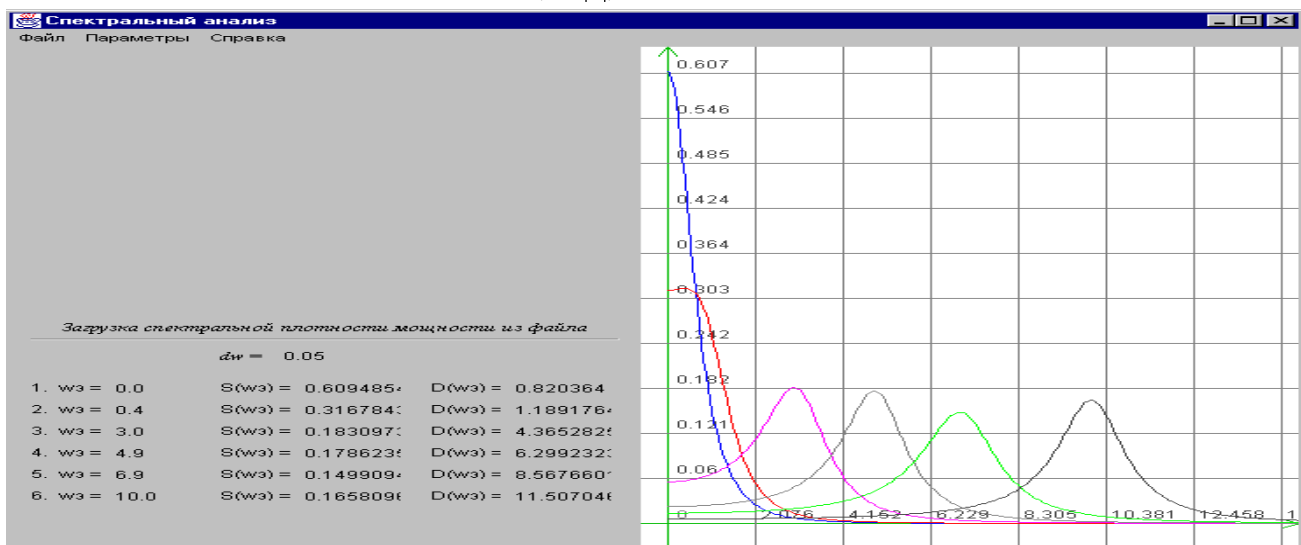
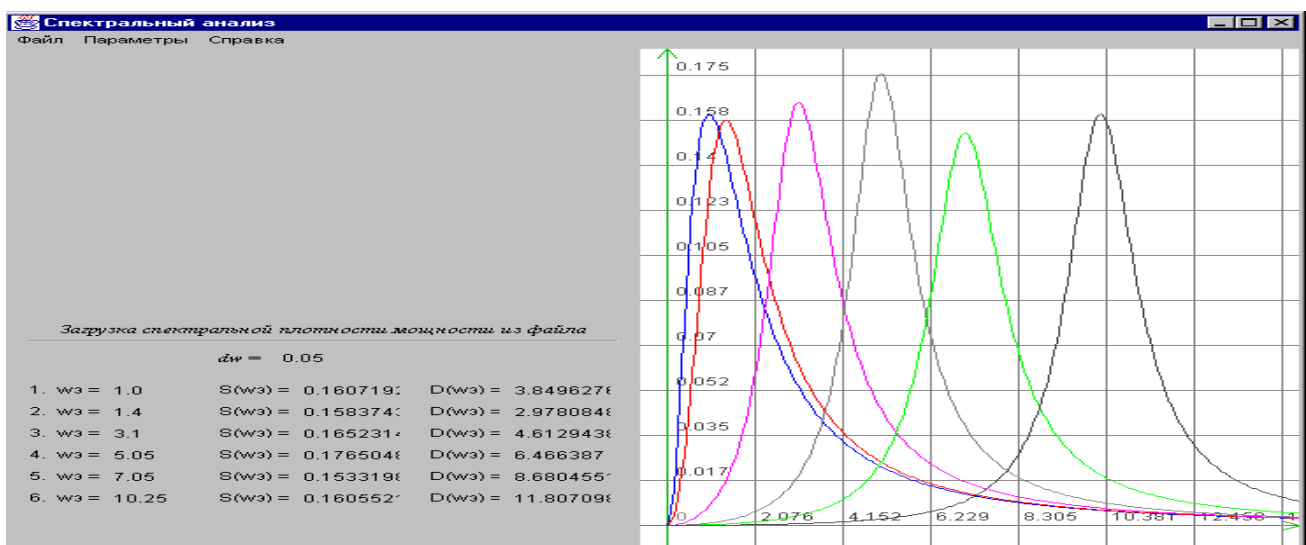


$$a) \rho_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\cos\omega_0\tau, \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$



$$a) \rho_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)(\cos\omega_0\tau - \alpha/\omega_0 \sin\omega_0|\tau|), \mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$$

Рисунок 1.19. Спектральные плотности мощности колебательных моделей

**Ординарным** называется поток, для которого вероятность появления на малом участке  $\delta t$ , примыкающем к произвольно выбранному моменту времени, более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления хотя бы одного события.

**Последствие** потока заключается в зависимости вероятности  $P_k(l-t, l)$  от распределения событий на оси времени вне интервала  $(l-t, l)$ . Либо, другими словами, поток не обладает последствием, если вероятность появления на любом интервале времени какого-либо числа событий не зависит от того, сколько событий произошло на других, не перекрывающихся с данным интервалом. Из литературы известно [15], что не обладает последствием только простейший случайный или иначе стационарный пуассоновский поток, имеющий экспоненциальное распределение интервалов времени между событиями в потоке.

Варьируя этими свойствами, можно образовывать различные классы потоков [5, 15]:

- простейший поток - поток Пуассона, обладающий всеми тремя свойствами, наиболее широко применяемый на практике;
- рекуррентные потоки, относящиеся к классу стационарных потоков Пальма, у которых одномерные законы распределения интервалов дискретизации одинаковы, а сами интервалы независимы между собой;
- поток смены состояний марковского процесса Вольда, предполагающий зависимость соседних интервалов между событиями в потоке;
- альтернирующие потоки, у которых плотность распределения интервалов чередуется от интервала к интервалу (выбирается из двух возможных видов);
- модель рекуррентного потока, получаемого разряжением посредством  $p$ -преобразования исходного потока (каждое событие с вероятностью  $p$  остается в потоке, а с вероятностью  $q=1-p$  выбрасывается).

Выбор модели потока зависит от характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д. При аналитических исследованиях предпочтение следует отдавать простейшим моделям, позволяющим получить сравнительно простые выражения, удобные для инженерного расчета основных параметров алгоритмов.

При решении перечисленных задач необходимо определить характеристики потока, которые можно задать различными способами [15]:

- вероятностью числа событий на заданном временном интервале;
- законом распределения интервалов между отсчётами потока;
- временами возвращения.

Эти способы дополняют друг друга, и в зависимости от решаемой задачи применяется один из них или их совокупность.

Плотность распределения вероятностей интервалов  $f_{\Delta t}(\Delta t)$  и функция распределения вероятностей интервалов  $F_{\Delta t}(\Delta t)$  являются основными характеристиками, позволяющими определить большинство вероятностных характеристик, и при математическом описании потока специфики не имеют. Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [12].

Плотности распределения прямого  $V$  и обратного  $U$  времен возвращения, необходимые для метрологического анализа оценки взаимных корреляционно-структурных функций, определяется в виде [5, 15]:

$$\varphi(t) = \varphi_v(t) = \varphi_u(t) = \lambda F(t), \quad (1.90)$$

где  $F(t)$  - функция распределения интервала дискретизации;

$\lambda$ - интенсивность потока.

При решении ряда прикладных задач представляет интерес время появления события и его отношение к предшествующим событиям, не обращая внимание ни на амплитуду события, ни на информацию, которую они несут. В системах реального времени к событиям могут быть отнесены: электрический импульс, сигнал переключения, прерывания, момент окончания алгоритма и т.д.

В настоящее время в литературе описаны различные статистические методы и аппаратура для анализа случайных событий [5, 15, 39, 64, 65]. Важной частью этого анализа является корреляционный анализ потоков событий. Корреляция событий основана на измерении распределения интервалов времени между случайными событиями. События могут представлять поток данных в вычислительных системах реального времени или временные ряды экспериментальных импульсов.

**Автокорреляция**  $C_x(t)$  определяет вероятность появления события в потоке  $X$  как функцию времени после данного события без учета числа прошедших событий:

$$C_x(t)dt = P[\text{событие в } X(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.91)$$

В дальнейшем для отличия автокорреляционной функции случайных процессов (последовательностей) автокорреляционную функцию потоков будем называть **интервальной корреляционной функцией (ИКФ)**.

**Взаимокорреляция**  $C_{xy}(t)$  применяется в случае двух потоков событий  $X$  и  $Y$  и определяет вероятность наблюдения события в потоке  $Y$  как функцию времени после данного события в потоке  $X$ , без учета числа прошедших событий:

$$C_{xy}(t)dt = P[\text{событие в } Y(t, t + dt) / \text{событие } X \text{ в } 0]. \quad (1.92)$$

Функцию  $C_{xy}(t)$  по аналогии назовем **взаимной интервальной функцией (ВИКФ)**.

Определенные таким образом, автокорреляция и взаимокорреляция применяются для объяснения поведения систем реального времени для измерения и управления, нейронных сетей и моделей поведения определения зависимости в случайных потоках, осуществления этой зависимости, обнаружения скрытых моделей в случайной последовательности и предложения соответствующей вероятностной модели исследуемой системы.

Определим ИКФ событий для конкретных практических случаев. При этом начнем со случайной последовательности, описываемой распределением Пуассона - простейшего потока. Корреляция событий в этом случае будет использована для распознавания системы и определения ее основных свойств.

Практическими интересными случаями являются [64]:

- системы с встроенными генераторами повторяющихся событий;
- системы с задержкой;
- системы с «мертвым» временем;
- периодические события, смещенные случайной девиацией;
- системы с буфером для одного и более событий;
- двойные стохастические пуассоновские процессы;
- разветвляющиеся стохастические процессы.

а) Пуассоновский процесс.

Пуассоновский процесс описывает вероятность появления числа событий  $r$  в произвольном интервале длиной  $t$ :

$$P(r, t) = \left[ (\lambda t)^r / r! \right] \exp(-\lambda t), \quad (r = 0, 1, \dots) \quad (1.93)$$

Пуассоновский процесс также дает распределение вероятностей интервалов  $t$  между событиями:

$$f(t) = P(r = 0, t) = \exp(-\lambda t).$$

ИКФ событий, основанная на определении (1.91) для пуассоновского процесса, равна среднему числу событий в  $dt$ :

$$\begin{cases} C_x(0) = 1; \\ C_x(0) = \lambda, \end{cases} \quad (1.94)$$

представлена на рис. 1.20 а).

б) Периодические события.

Для периодических событий выражение (1.91) приводит к:

$$\begin{cases} C_x(t) = 1, \text{ для } t = kT; \\ C_x(t) = 0, \text{ для } t \neq kT. \end{cases} \quad (1.95)$$

Результат представлен на рис. 1.20 б).

в) Периодические события, смещенные случайной девиацией («дрожание»).

В этой модели события должны появляться через регулярные интервалы, т.е. периодически, но они смещены относительно требуемого момента появления случайным образом.

Из выражения (1.91) следует, что

$$C_x(t + kT) = g(t) * g(t), \quad (1.96)$$

где  $g(t)$  - плотность распределения вероятностей  $t$  («дрожание»);

\*- операция нахождения композиции законов распределения.

Результат представлен на рис. 1.20 в).

г) Системы с «мертвым» временем.

Модель имеет соответствующее «мертвое» время [47]. После прихода входного события система пропускает это событие на выход и затем закрывается на фиксированное «мертвое» время  $T$ , например, на время обработки информации на ЭВМ. ИКФ выходного процесса может быть определена следующим образом [64].

Для  $d < t < 2d$ , используя выражения (1.91), (1.93), получим:

$$C_x(t)dt = P(1, dt)P(0, t-d) = f(t)P(0, t-d) \quad (1.97)$$

Для  $2d < t < 3d$  интервал  $t$  может быть сформирован двумя способами.

Первый способ:

$t = d + t_1$  с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi_1(t-d) = f(t). \quad (1.98)$$

Вероятность такого способа формирования  $t$  равна  $P(0, t-d)$ .

Второй способ:

$t = 2d + t_1 + t_2$  с плотностью

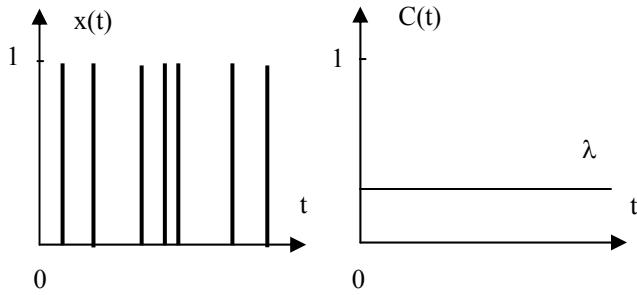
$$\varphi_2(t-2d) = f(t) * f(t). \quad (1.99)$$

Вероятность такого способа формирования  $t$  равна  $P(1, t-2d)$ .

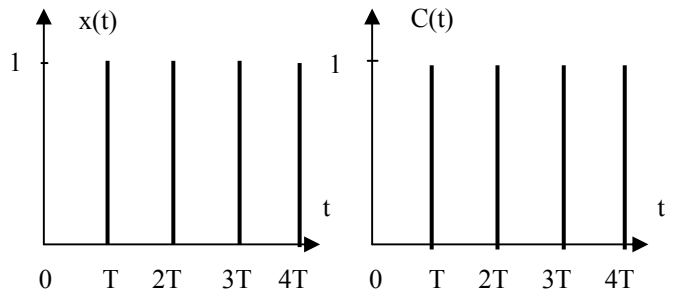
Таким образом:

$$C_x(t)dt = P(0, t-d)f(t) + P(1, t-2d)f(t)*f(t). \quad (1.100)$$

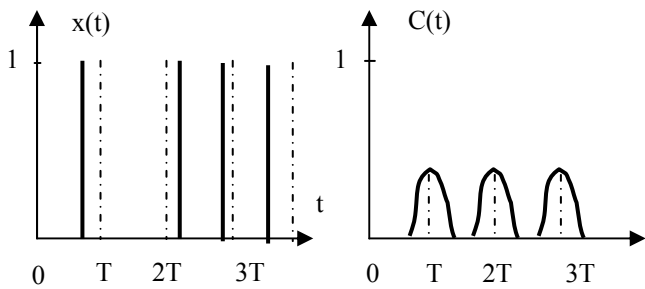
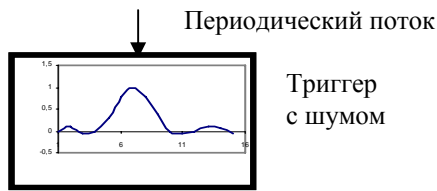
а) Пуассоновский поток



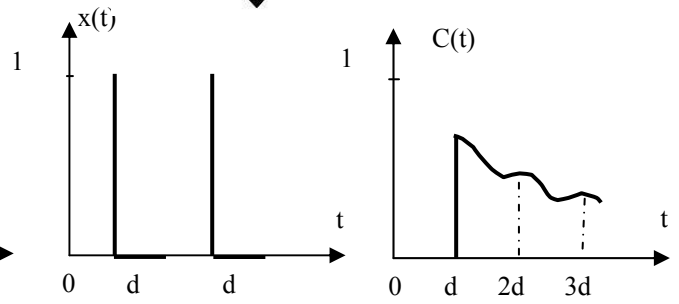
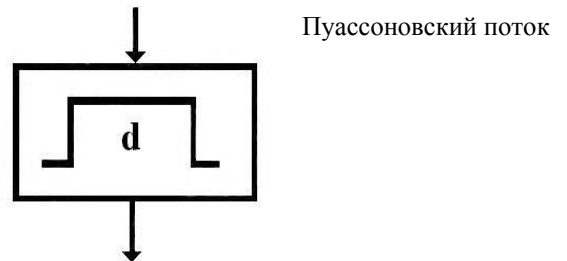
б) Периодический поток



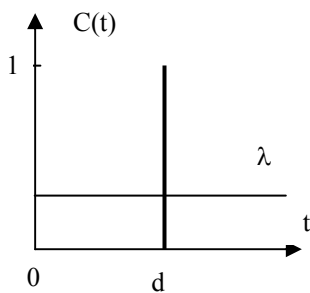
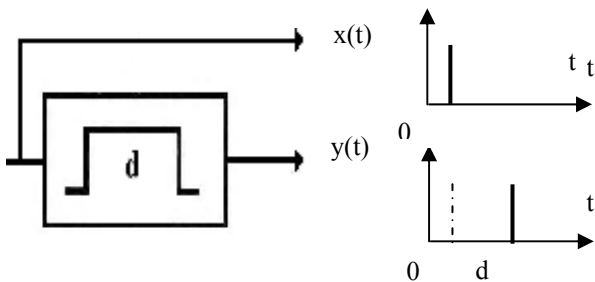
в) Периодический поток с «дрожанием»



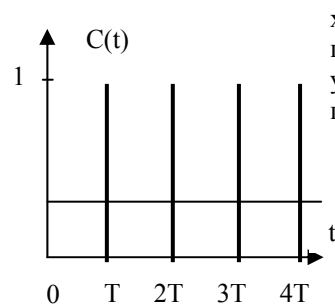
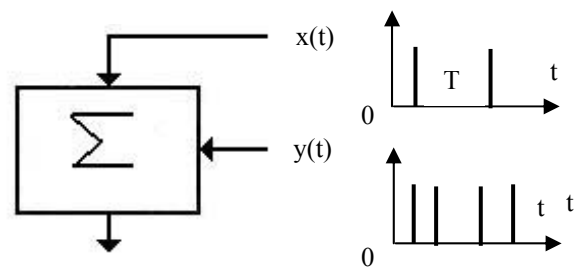
г) Система с «мертвым» временем



д) Взаимная корреляция



е) Суперпозиция



$x(t)$  – Пуассоновский поток;  
 $y(t)$  – периодический поток.

Рисунок 1.20. Интервальные корреляционные функции

Обобщая выражение (1.100) для  $k$  способов формирования интервалов, получим:

$$C_x(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} P[k, t - (k+1)d] [f(t) \dots * f(t)]. \quad (1.101)$$

Следует отметить, что многократная композиция законов распределения Пуассона приводит к распределению Эрланга [15]. Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого случая представлена на рис. 1.20 г)

Аналогичным образом можно привести дополнительные примеры взаимодействия случайных последовательностей и систем.

#### Взаимная корреляция.

Более общим применением корреляционного анализа потоков событий являются случаи с несколькими потоками событий в системе. Случайные потоки могут наблюдаться в различных точках системы и не взаимодействовать друг с другом. В других случаях потоки «перемешиваются». Это явление получило название суперпозиции потоков [64].

В первом случае ВИКФ позволяет определить степень взаимозависимости потоков. На рис. 1.20 д) приведен пример системы с постоянной задержкой  $d$  в обработке информации при подаче на вход простейшего потока. Выражение (1.92) для рассматриваемого примера позволяет определить ВИКФ входного и выходного потоков в виде:

$$\begin{cases} C_{xy}(t) = 1, & \text{для } t = d; \\ C_{xy}(t) = \lambda, & \text{для } t \neq d, \end{cases} \quad (1.102)$$

что позволяет в случае необходимости величину задержки  $d$ .

#### Суперпозиция случайных потоков.

Во многих физических и инженерных случаях потоки событий представляют собой суперпозицию некоторых других потоков событий. Например, поток случайных прерываний, приходящий в процессор от нескольких источников. Если поток событий представляет собой смесь двух или нескольких потоков событий, его ИКФ будет равна сумме ИКФ индивидуальных потоков. Так на рис. 1.20 е) показана суперпозиция Пуассоновского и периодического потоков вместе с результирующей ИКФ. Если в ходе проведения эксперимента будет получена похожая ИКФ, то сравнив её с результатами рис. 1.20 е), можно сделать вывод о том, что периодический поток «погружен» в случайный поток.

Для потоков, рассмотренных в примерах 1.20 а) – 1.20 г), можно представить различные суперпозиции. ИКФ в этих случаях поможет различить составляющие потоки, их интенсивность и скорость. Кроме того, ИКФ может быть использована при моделировании и измерении характеристик случайных потоков и процессов с нерегулярным интервалом дискретизации.

Приведем несколько примеров, связанных с функционированием вычислительных систем реального времени.

#### Сканирование

В вычислительных системах реального времени, основанных на сканировании, программа вычислений определяет время и порядок выполнения операций. Из-за то-

го, что для обработки могут применяться различные алгоритмы, сканирование может представлять процесс, в котором появление событий планируется через регулярные интервалы времени, но благодаря различному времени обработки они будут смещены от времени расписаний. Следовательно, ИКФ процесса сканирования будет похожа на функцию, представленную на рис. 1.20 в). ИКФ в рассматриваемом примере отражает степень нерегулярности процесса сканирования.

#### Мультиплексирование.

При подключения множества источников информации к мультиплексору его выходной поток будет определяться суперпозицией входных потоков. В этом случае его ИКФ будет являться суммой составляющих ИКФ, как показано на рис. 1.20 е). Даже если составляющие потоки событий являются достаточно периодическими, результирующий поток может быть случайным. Был отмечен интересный факт для нервных клеток, когда нервные импульсы приходят по множеству волокон [64]. Последовательность нервных импульсов, формируемая в результате суперпозиции значительного числа довольно регулярных последовательностей, представляет собой случайную последовательность. ИКФ в этом случае определяет степень регулярности потока.

#### «Мертвое время».

Если время обработки события  $T$  имеет тот же порядок, что и средний интервал между событиями  $1/n$ , значительное число выходных событий будет потеряно. Потери за счет «мертвого» времени для многих практических случаев найдены Соучеком Б. [47]. Так, например, если «мертвое» время постоянно и равно  $T$ , то потери определяются выражением

$$g(T) = nT. \quad (1.103)$$

Выходная последовательность и его ИКФ представлены на рис. 1.20 г).

В измерительных системах реального времени, предназначенных для построения гистограммы исследуемого сигнала, потери «мертвого» времени не внесут искажения в гистограмму. Это объясняется тем, что при кодировании информации применяется импульсная модуляция и импульсы приходят случайным образом, а временные зависимости не учитываются. Ситуация значительно ухудшается при построении гистограмм временных интервалов. В таких системах «мертвое» время должно быть значительно меньше, чем среднее время между событиями потока.

#### Буферизация.

Если интервал между событиями короче, чем время обработки  $T$ , буфер запомнит второе событие, что, в свою очередь, уменьшит потерю событий [47]:

$$g_1(T) = nT - [1 - \exp(-nT)]. \quad (1.104)$$

Событие, запомненное в буфере, обрабатывается сразу после «мертвого» времени. Таким образом, буфер «сдвигает» события вдоль временной оси, формируя более регулярные интервалы. ИКФ в этом случае позволяет измерить степень регулярности временных интервалов.

#### Нейронные импульсы.

Поток нейронных импульсов записывается с помощью микроэлектродов [66]. Результатом анализа потока является ИКФ (корреляционная гистограмма), которая сравнивается с ранее полученными результатами, например, представленными на рис.

1.20, с целью построения наиболее адекватной модели потока. Как показали исследования, наиболее адекватной моделью потока нейронных импульсов является суперпозиция (см. рис. 1.20 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.20 а) и смещенного регулярного потока (см. рис. 1.20 в) [66]. ИКФ в этом случае помогла определить свойства модели рассматриваемой системы.

#### Коммуникация насекомых.

В работе [64, 66] приведен интересный пример из жизни насекомых-сверчков. В спокойном состоянии периодичность посылок сообщений сверчка случайна. Но стоит их потревожить, как картина резко меняется- появляется некоторая закономерность в посылки их сообщений. Была проанализирована импульсная последовательность сигналов насекомых, используемая ими для коммуникации, и определена ИКФ интервалов между посылками сообщений этих насекомых. Экспериментальные результаты были сравнены затем с результатами, представленными на рис. 1.20. Адекватной моделью для этого случая является суперпозиция (см. рис. 1.20 е) пуассоновского потока (см. рис. 1.20 а) и потока на выходе системы с фиксированным временем обработки, т. е. системы с “мертвым” временем (см. рис. 1.20 г). ИКФ, как и в предыдущем случае использовалась для построения модели системы.

Таким образом, в рассмотренных примерах для вычислительных систем реального времени и их основных функциональных блоков: сканеров, мультиплексоров, элементов задержки, процессоров обработки («мертвое» время), буферов и т. д.,- по результатам оценки ИКФ определялась модель неизвестного потока событий и строилась соответствующая вероятностная модель системы, через которую эти события прошли. Кроме того, ИКФ применялась для анализа и сравнения потоков событий в нейронных сетях и система поведения.

Было показано, что суперпозиция почти периодических потоков событий (мультиплексирование) приводит к появлению на выходе случайного потока. С другой стороны, процесс обработки, буферизация «сглаживают» случайный поток, преобразуя его в почти периодическую последовательность. Следует отметить, что интервальная корреляционная функция позволяет определить и скрытые модели в экспериментальных данных, а взаимная интервальная корреляционная функция - степень зависимости двух потоков событий.

Это важное обстоятельство: возможность определения степени зависимости событий одного потока (разных потоков) через интервальные корреляционные функции,- позволяет применять их и для анализа неэквилибриальных временных рядов.

### **1.9. Математическое описание неэквилибриальных временных рядов**

При описании неэквилибриального временного ряда необходимо учитывать специфику его представления в виде двух массивов выборочных данных:  $[x_{ji}(t_{ji} / \Delta t_{ji})]_{j=1, \dots, N}^{i=1, \dots, M_j}$  - массива мгновенных значений  $x_{ji}$  и соответствующих им моментов или интервалов времени  $t_{ji} / \Delta t_{ji}$ , фиксирующих факт проведения измерений.

Такое представление позволяет для математического описания массива значений  $x_{ji}$  использовать математический аппарат теории случайных процессов, а для описания временной последовательности  $t_{ji}$  - математический аппарат теории потоков событий [39].



Независимо от особенностей математического описания  $x_{ji}$  и  $t_{ji}$  неэквидистантные временные ряды можно разбить на два класса:

- характеристики потока событий  $t_{ji}$  не зависят от характеристик исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.21);
- характеристики потока событий  $t_{ji}$  полностью определяются характеристиками исследуемого случайного процесса (см. рис. 1.22).

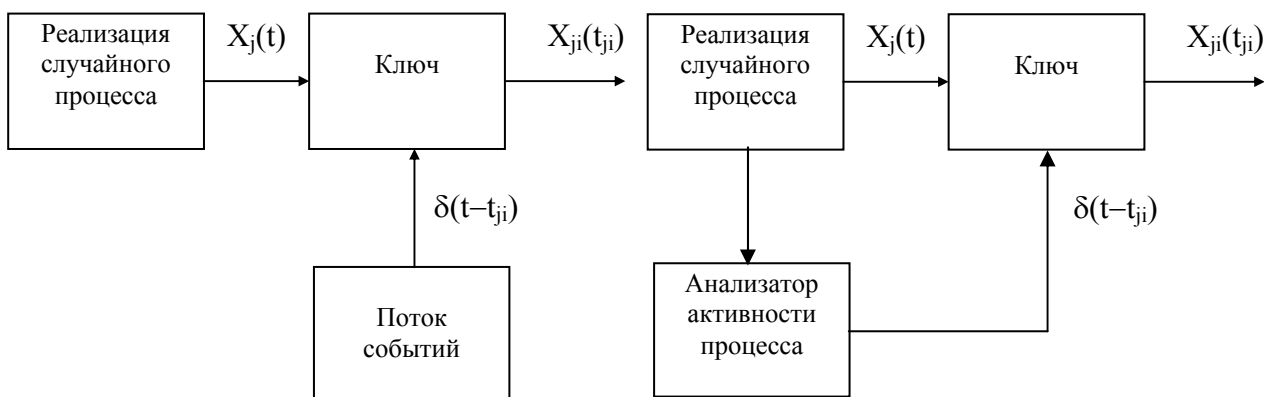


Рисунок 1.21. Характеристики потока не зависят от характеристик процесса

Рисунок 1.22. Характеристики потока зависят от характеристик процесса

К первому классу неэквидистантных временных рядов приводит **непреднамеренная случайная дискретизация**, не зависящая от желания исследователя, в том числе, и «некачественная» регулярная дискретизация [15, 39]:

- регулярная дискретизация с пропусками наблюдений;
- регулярная дискретизация с «дрожанием»;
- регулярная дискретизация с «дрожанием» и пропускам наблюдений.

Ко второму классу относится **преднамеренная нерегулярная дискретизация**, например: адаптивно-временная, спорадическая, - вводимая по желанию исследователя [4, 5, 15, 22, 23, 39]. Следует подчеркнуть, что чем большей априорной информацией о характере нерегулярной дискретизации располагает исследователь, тем более точную модель потока событий он построит.

Так, например, если  $\Delta x_{ji} = \text{const}$ ;  $\Delta t_{ji} = \text{random}$ , то такая дискретизация называется спорадической [22]. Для неё известна связь между интервалом дискретизации и характеристиками случайного процесса. Учёт этого важного обстоятельства позволяет упростить процедуру оценивания вероятностных характеристик и её метрологический анализ.

Математическое описание потоков событий и его характеристики зависят от способа дискретизации случайного процесса (см. рис. 1.23).

Выбор модели потока при описании неэквидистантного временного ряда зависит от способа неравномерной дискретизации, характера решаемой задачи, метода исследований (аналитический или имитационное моделирование) и т.д.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели потока событий, являются следующие:

- модель должна адекватно описывать поток - совпадение основных характеристик потока и модели;

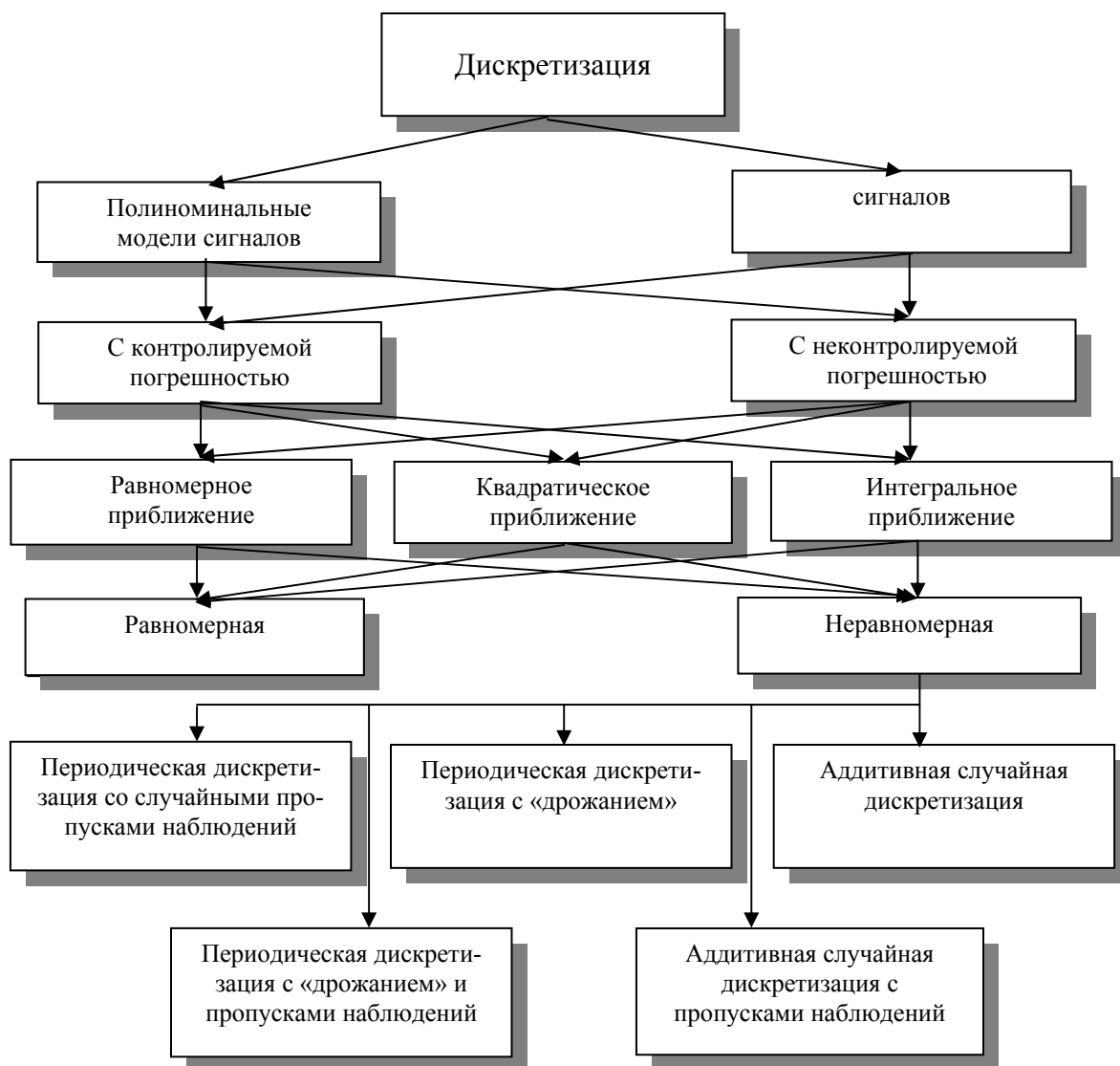


Рисунок 1.23. Классификация методов дискретизации

- быть по возможности простой, позволяющей аналитическое определение основных характеристик потока;
- для потоков, зависящих от характеристик случайного процесса, позволять определение характеристик потока в зависимости от характеристик процесса.
- При статистических измерениях при неравномерной дискретизации случайных процессов возможны следующие случаи:
  - случайная дискретизация непреднамеренная и для нее необходимо оценить увеличение методической погрешности, вызванное этой неравномерностью;
  - случайная дискретизация преднамеренная с известными характеристиками потока и необходимо: разработать алгоритмы статистических измерений, определить увеличение методической погрешности, вызванной неравномерностью дискретизации;
  - случайная дискретизация преднамеренная, и для нее необходимо определить требования к потоку при известных характеристиках процесса с целью обеспечения допустимых методических погрешностей измерения значений вероятностных характеристик.

Как правило, для анализа алгоритмов статистических измерений и расчета их основных параметров необходимо знание:

- закона распределения интервалов и их моментных характеристик, используемых при оценке составляющей методической погрешности, обусловленной неравномерностью дискретизации (см. подраздел 1.6);
- закона распределения сумм интервалов, требуемые для определения числа каналов аппаратно-программных средств при измерении функциональных вероятностных характеристик, например, корреляционно-структурных;
- плотности распределения времен возвращения, используемой при статистическом анализе взаимных корреляционно-структурных характеристик (см. подраздел 1.6);
- интервальной корреляционной функции, необходимой для усреднения результата и оценки составляющих методической погрешности (см. подраздел 1.6);
- минимального интервала дискретизации - параметра аппаратно-программных средств, обеспечивающего допустимые значения составляющей методической погрешности, обусловленной дискретизацией;
- интенсивности потока - величины, обратной математическому ожиданию интервала дискретизации, используемой для оценки коэффициента сжатия, определения допустимого значения погрешности восстановления случайного процесса;
- коэффициента сжатия  $k_{сж}$ , характеризующего число существенных отсчетов на выходе аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим в общем виде определение указанных характеристик без учета конкретных особенностей моделей потоков.

Задаче определения статистических характеристик интервалов между существенными отсчетами, являющейся задачей о первом достижении границ, посвящено большое число работ (см. например, [30]). Как известно, строгое решение этой задачи, связанное с  $n$ -мерным интегрированием  $n$ -мерной плотности вероятности процессов при  $n \rightarrow \infty$ , может быть получено в аналитическом виде только для марковского процесса первого порядка [30]. В остальных же случаях авторы для конкретных способов неравномерной дискретизации при определенных допущениях приводят аналитические выражения  $f_{\Delta t}(\Delta t)$ ,  $F_{\Delta t}(\Delta t)$ .

Так, в [4] для адаптивно-временной дискретизации, полиномами нулевого и первого порядка при условии постоянства производной на интервале дискретизации, что справедливо лишь при малых погрешностях восстановления (уставки) и известном законе распределения модуля  $n+1$  производной, приводятся и анализируются законы распределения интервалов.

Однако, на практике применение такого подхода оказывается проблематичным, так как только для нормального  $n+1$  раз дифференцируемого входного процесса возможно аналитическое определение закона распределения модуля  $n+1$  производной. В остальных же случаях задача не имеет решения.

В [4,15] в результате обработки большого экспериментального материала авторы делают вывод о том, что математическая модель интервалов дискретизации для адаптивно-временных дискретизаторов с предсказателем нулевого порядка представляет собой рекуррентный поток с гамма-распределением интервалов:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^\alpha \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.105)$$

где  $\lambda$  - интенсивность потока.

Причем, чем меньше корреляционные связи между отсчетами входного процесса источника, тем меньше коэффициент  $\lambda$ , а для безызбыточных выборок он практически равен 1.

Отметим, что при  $\alpha = 1$  распределение интервалов становится экспоненциальным:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t), \quad (1.106)$$

а поток отсчетов - пуассоновским [15].

На пуассоновский характер потока при различных способах неравномерной дискретизации указывают и другие авторы [4, 23, 39].

В некоторых частных случаях неравномерной дискретизации возможно аналитическое определение закона распределения интервалов, в остальных же случаях полученные результаты для повышения достоверности должны проверяться методом имитационного моделирования и экспериментальными исследованиями [39].

Определение моментных характеристик интервалов дискретизации при известном законе их распределения затруднений не вызывает [12].

Законы распределения сумм интервалов для рекуррентных потоков наиболее целесообразно определить через характеристическую функцию интервалов  $\varphi_{\Delta t}(u)$  [40].

В этом случае характеристическая функция  $\Theta_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$  равна:

$$\varphi_{\Theta_s}(u) = [\varphi_{\Delta t}(u)]^s \quad (1.107)$$

Отсюда, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для  $\varphi_{\Theta_s}(u)$ , определим  $f_{\Theta_s}(\Theta_s)$  и  $F_{\Theta_s}(\Theta_s)$  [32].

При определении числа каналов аппаратно-программных средств возникает необходимость в определении распределения сумм  $L$  интервалов дискретизации на заданном интервале наблюдения оцениваемой вероятностной характеристики, например, на максимальном интервале корреляции  $\tau_{k \max}$  [39].

$$\begin{aligned} P(L, \tau_{k \max}) &= P(\tau_{k \max} \leq \Theta_L \cap \Theta_{L-1} < \tau_{k \max}) = \\ &= F_{L-1}(\tau_{k \max}) - F_L(\tau_{k \max}) \end{aligned} \quad (1.108)$$

Значение  $L_{\max}$ , обеспечивающего выполнение условия (1.108) с вероятностью  $P_d$ , находится из уравнения:

$$F_{L_{\max}}(\tau_{k \max}) = 1 - P_d. \quad (1.109)$$

Определим вероятность того, что один отсчёт потока отстоит от другого на расстоянии  $J\Delta\tau \pm \Delta\tau/2$  без учёта числа прошедших отсчётов.

Введем случайную величину, равную сумме  $k$  интервалов дискретизации:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^k \Delta t_{ji}. \quad (1.110)$$

Найдем вероятность того, что случайная величина  $\Theta_{jk}$  находится в диапазоне

$$J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2} :$$

$$P\left\{J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} < \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right\} = F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{\Theta_{jk}}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right). \quad (1.111)$$

Вероятность того, что в этот интервал попадет любой из k отсчетов, равна:

$$C_{x_j}(J) = C_{x_j}(J\Delta\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left[J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2} \leq \Theta_{jk} < J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ F_{jk}\left(J\Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) - F_{jk}\left(J\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{2}\right) \right], \quad (1.112)$$

В соответствии с определением (1.91) это и есть интервальная корреляционная функция.

При **преднамеренной неравномерной дискретизации** с целью упрощения аппаратной реализации сжатия данных используются полиномиальные модели восстановления нулевого и первого порядка (см. таблицу 1.10), требующие для реализации сравнительно простые технические средства и обладающие достаточной эффективностью, хотя в некоторых случаях рассматривается применение и других моделей, в том числе и сплайн - аппроксимации.

Модели входных сигналов при адаптивной дискретизации

Таблица 1.10

№	Название модели	Аналитическое выражение	Критерий	$\Delta t_0$	
				n=0	n=1
1	Интерполяционный полином Лагранжа	$\sum_{m=0}^n a_m t^m$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
2	Ряд Маклорена	$\sum_{m=0}^n \frac{x^{(m)}(0)t^m}{m!}$	Равномерное приближение	$\frac{\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{8\varepsilon}{\mu_2}}$
3	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n b_m t^m$	Квадратическое приближение	$\frac{2\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{12\varepsilon}{\mu_2}}$
4	Полиномиальная	$\sum_{m=0}^n c_m t^m$	Интегральное приближение	$\frac{4\varepsilon}{\mu_1}$	$\sqrt{\frac{48\varepsilon}{\mu_2}}$

В рассматриваемых полиномиальных моделях при  $n = 0$  и  $n = 1$  модели j-ой реализации случайного процесса на i-ом интервале дискретизации записываются в виде

$$x_{ji}^{(m)}(t) = a_{ji}^{(0)} \delta_{ji}^* ; \quad (1.113)$$

$$x_{ji}^{(m)}(t) = \left( a_{ji}^{(0)} + a_{ji}^{(1)} t \right) \delta_{ji}^* , \quad (1.114)$$

где  $\delta_{ji}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{ji} \leq t < t_{j,i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$  - (1.115)

индикатор состояния, определяющий интервал дискретизации.

Так, при адаптивно-временной дискретизации и критерии равномерного приближения параметры моделей определяются в следующем виде:

1. для предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой:

$$a_{ji}^{(0)} = x_{ji}; \quad (1.116)$$

2. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по соседним отсчетам равномерной дискретизации, т.е. непосредственно в существенном отсчете:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = x_{ji} - \Delta_{ji} t_{ji}; \\ a_{ji}^{(1)} = \Delta_{ji}, \end{cases} \quad (1.117)$$

где  $\Delta_{ji} = \frac{x_{j1} - x_{ji}}{t_{j1} - t_{ji}}$ , а  $t_{j1} = t_{ji} + \Delta t_0$ ,  $x_{j1} = x_{j1}(t_{j1})$ ,  $\Delta t_0$  - интервал дискретизации процесса;

3. для предсказателя первого порядка, определяющего производную сигнала по предыдущему и текущему существенным отсчетам сигнала:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{j,i-1} t_{ji} - x_{ji} t_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{ji} - x_{j,i-1}}{t_{ji} - t_{j,i-1}}; \end{cases} \quad (1.118)$$

4. для «всерного» интерполятора первого порядка:

$$\begin{cases} a_{ji}^{(0)} = \frac{x_{ji} t_{j,i+1} - x_{j,i+1} t_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}; \\ a_{ji}^{(1)} = \frac{x_{j,i+1} - x_{ji}}{t_{j,i+1} - t_{ji}}. \end{cases} \quad (1.119)$$

Следующей важной характеристикой является минимальный интервал дискретизации, позволяющий восстановить случайный процесс по существенным отсчётам.

Эту характеристику необходимо определять в случаях, когда характеристики потока зависят от характеристик процесса: при адаптивно-временной, спорадической дискретизации, адаптивной коммутации и т.д.

Если значение интервала принудительной дискретизации превышает минимальный, то возможны пропуски отсчетов, что, в свою очередь, приводит к увеличению методической погрешности оценки значений вероятностных характеристик.

Существуют различные приближенные методы определения минимального интервала дискретизации, требующие ту или иную априорную информацию о свойствах процесса, модели процесса на интервале дискретизации и ее параметрах, способе неравномерной дискретизации и т.д.

Так для АД, использующих полиномиальные модели, как правило, низких порядков ( $n=0, n=1$ ), необходимо знание максимального значения модуля  $n+1$  производной  $\mu_{n+1}$  на интервале дискретизации. Аналитически эта задача может быть решена только для дифференцируемых процессов с  $2(n+1)$  раз дифференцируемой корреляционной функцией, т.е. в ограниченных случаях [4]. В остальных же - возможно применение неравенства Бернштейна, которое справедливо для функций, ограниченных по модулю и имеющих финитную спектральную плотность мощности [39]:

$$\mu_{n+1} = \max |x^{(n+1)}(t)| \leq \omega_c^{n+1} \max |x(t)|, \quad (1.120)$$

где  $\omega_c$  - верхняя граничная частота спектра входного процесса.

Из выражения (1.120) видно, что для оценки  $\mu_{n+1}$  необходима информация о законе распределения модуля и спектральной плотности мощности входного процесса.

Воспользовавшись этим выражением, определим минимальный интервал дискретизации [4]:

$$\Delta t_{\min} = n+1 \sqrt{\frac{\varepsilon k}{\mu_{n+1}}}, \quad (1.121)$$

где  $\varepsilon$  - погрешность аппроксимации;  $k$  - коэффициент, зависящий от вида, степени аппроксимирующего полинома и критерия приближения (см. табл. 1.10).

Следует отметить, что неравенство Бернштейна дает сильно завышенное значение  $\mu_{n+1}$ . Скорректировать это завышение возможно подбором множителя  $R$  в уравнении определения  $\omega_c$

$$\int_0^{\omega_c} S_x(\omega) d\omega = R \sigma_x^2. \quad (1.122)$$

Так для нормального входного процесса с КФ  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$

$$\omega_c = \alpha \operatorname{tg} R\pi. \quad (1.123)$$

В таблице 1.11 приведены результаты определения  $\Delta t_{\min}$  в соответствии с выражением (1.121) для предсказателей нулевого порядка с плавающей апертурой для различных  $R$  и результаты имитационного моделирования [39]. Отсюда видно, что хорошее совпадение наблюдается при  $R=0,4$ .

Минимальный интервал дискретизации

Таблица 1.11

$\gamma = \varepsilon / \sigma_x$	0,25	0,5	0,75	1,0
$R = 0,320$	0,0529	0,1058	0,1587	0,2115
$R = 0,400$	0,0271	0,0542	0,0812	0,1083
$R = 0,475$	0,0066	0,0131	0,0197	0,0262
Результаты имитационного моделирования	0,0288	0,0579	0,0977	0,1465

Аналогичным образом возможно определение  $\Delta t_{\min}$  и для других моделей КФ входного процесса.

Интенсивность потока  $\lambda$  - величина, обратная математическому ожиданию интервала дискретизации, как параметр закона распределения используется при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определении коэффициента сжатия.

Существуют различные способы определения коэффициента сжатия [4]. Учитывая, что эта характеристика в дальнейшем будет использоваться при метрологическом анализе алгоритмов статистических измерений, определим ее в виде:

$$k_{\text{сж}} = \frac{N}{M}, \quad (1.124)$$

где  $N$  - число отсчетов при равномерной дискретизации;

$M$  - число отсчетов при неравномерной дискретизации при той же длительности реализации и погрешности восстановления.

При известных характеристиках потока выражение (1.124) удобно представить в виде:

$$k_{\text{сж}} = \frac{m_{\Delta t}}{\Delta t_{\min}} = \frac{1}{\lambda \Delta t_{\min}}. \quad (1.125)$$

### 1.10. Типовые модели неэквидистантных временных рядов

Рассмотрим типовые модели неэквидистантных временных рядов, широко применяемых на практике как при описании, так и при метрологическом анализе алгоритмов оценивания вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. На практике, при описании различных видов неравномерной дискретизации, приводящей к нерегулярным временным рядам, как правило, применяют модели рекуррентных потоков Пальма [4, 15, 23, 39]:

- периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений;
- периодической дискретизации с «дрожанием»;
- аддитивной случайной дискретизации;
- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений;
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений.

**Так для периодической дискретизации со случайными пропусками наблюдений** интервал дискретизации  $\Delta_{ji} = t_{j,i+} - t_{ji}$  определяется в соответствии с выражением

$$\Delta t_{ji} = Y_{ji} \Delta t_0, \quad (1.126)$$

где  $\Delta t_0$  - интервал принудительной дискретизации;

$Y$ -случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  [11]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.127)$$

В соответствии с выражением (1.126) мгновенное значение выборки случайного процесса и соответствующая ему метка времени равны:

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ji} \left( \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{jk} \right); \\ t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{j=1}^i Y_j. \end{cases} \quad (1.128)$$

Плотность и функция распределения вероятностей интервала дискретизации соответственно имеют вид [15]:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \delta[\Delta t - i\Delta t_0] \quad (1.129)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = p \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} 1[\Delta t - i\Delta t_0], \quad (1.130)$$

где  $1[\Delta t] = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta t \geq 0 \\ 0, & \text{если } \Delta t < 0 \end{cases}$  - единичная функция.



Для определения моментных характеристик, законов распределения сумм интервалов удобнее воспользоваться характеристической функцией [40]:

$$\varphi_{\Theta}(u) = \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)}. \quad (1.131)$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\begin{cases} m_{\Delta t} = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_{\Delta t}^2 = \frac{\Delta t_0^2 q}{p^2}, \end{cases} \quad (1.132)$$

а плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} l[\Delta t - i\Delta t_0]. \quad (1.133)$$

С учетом выражения (1.131) характеристическая функция  $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$  равна

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \left[ \frac{p \exp(iu\Delta t_0)}{1 - q \exp(iu\Delta t_0)} \right]^n. \quad (1.134)$$

Откуда плотность и функция распределения  $Z_{nj}$  определяется в виде:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} = k\Delta t_0) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \delta[Z_{nj} - k\Delta t_0] \quad (1.135)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = P(Z_{nj} \leq k\Delta t_0) = \sum_{r=n}^k C_{r-1}^{n-1} p^r q^{r-n} l[Z_{nj} - r\Delta t_0] \quad (1.136)$$

С учетом выражения (1.136)  $L_{\max}$ , обеспечивающее выполнение условия (1.108), находится из уравнения

$$p^{L_{\max}} \sum_{r=L_{\max}}^m C_{r-1}^{L_{\max}-1} q^{r-L_{\max}} l[\tau_{k \max} - r\Delta t_0] = 1 - P_d, \quad (1.137)$$

где  $m = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta t_0} \right] + 1$ .

Плотность распределения  
 $\Delta t = 0,4$   $\tau_{k \max} = 3$

Функция распределения  
 $\Delta t = 0,4$   $\tau_{k \max} = 3$

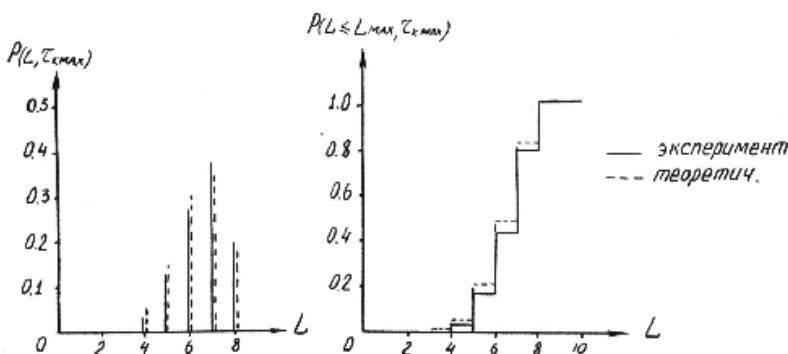


Рисунок 1.24 Плотность и функция распределения суммы интервалов на  $\tau_{k \max}$

На рис. 1.24 приведены результаты расчета плотностей и функций распределения вероятностей в соответствии с выражениями (1.135), (1.136) для  $p=0,8$ ,  $\Delta t_0=0,4$ ,  $\tau_{k \max}=3$  и результаты имитационного моделирования, подтверждающие правильность расчетов. Из рис. 1.24 видно, что для  $p=0,8$   $L_{\max}=m$ .

Интервальная корреляционная функция для рассматриваемого потока равна

$$C_x(J) = p, \quad (1.138)$$

а минимальный интервал дискретизации и коэффициент сжатия соответственно равны:

$$\begin{cases} \Delta t_{\min} = \Delta t_0; \\ k_{\text{сж}} = \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.139)$$

**Для периодической дискретизации с «дрожанием»**

$$\begin{cases} t_{ji} = i\Delta t_0 + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.140)$$

где  $\xi_{ji}$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$ , каждая из которых расположена в диапазоне  $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$ , а интервал дискретизации равен

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}. \quad (1.141)$$

Характеристики потока будут зависеть от  $f_\xi(\xi)$ . Рассмотрим пример, когда  $\xi$  распределена по нормальному закону с  $m_\xi = 0$  и  $D_\xi = \sigma_\xi^2$ .

Тогда плотность, функция распределения вероятностей и характеристическая функция соответственно равны:

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(\Delta t - \Delta t_0)}{4\sigma_\xi^2}\right); \quad (1.142)$$

$$F_{\Delta t}(\Delta t) = \Phi\left*\left(\frac{\Delta t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right)\right, \quad (1.143)$$

где  $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  [12];

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \exp\left(-u^2\sigma_x^2 + iu\Delta t_0\right). \quad (1.144)$$

Откуда  $m_{\Delta t} = \Delta t_0$ , а  $D_{\Delta t} = 2\sigma_\xi^2$ .

Плотность распределения времени возвращения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Delta t_0} \Phi\left*\left(\frac{t - \Delta t_0}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right)\right. \quad (1.145)$$

Характеристическая функция суммы  $n$  независимых интервалов  $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$  с

учетом выражения (1.144) запишется в виде

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \exp\left(-n(u^2\sigma_\xi^2 - iu\Delta t_0)\right), \quad (1.146)$$

а соответствующие ей плотность и функция распределения вероятностей равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(Z_{nj} - n\Delta t_0)^2}{4n\sigma_\xi^2}\right), \quad (1.147)$$

$$F_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \Phi^*\left(\frac{Z_{nj} - n\Delta t_0}{\sqrt{2n}\sigma_\xi}\right). \quad (1.148)$$

Для нормального закона распределения  $\xi$   $L_{\max}$  определяется из уравнения

$$\Phi^*\left(\frac{\tau_{k\max} - L_{\max}\Delta t_0}{\sqrt{2L_{\max}}\sigma_\xi}\right) = 1 - P_d, \quad (1.149)$$

которое с учетом свойств  $\Phi^*(x)$  приведем к виду:

$$\Phi^*\left(\frac{L_{\max}\Delta t_0 - \tau_{k\max}}{\sqrt{2L_{\max}}\sigma_\xi}\right) = P_d. \quad (1.150)$$

Отсюда, после преобразований получим следующее уравнение:

$$L_{\max}^2 - \frac{2L_{\max}(\Delta t_0\tau_{k\max} + A^2\sigma_\xi^2)}{\Delta t_0} - \frac{\tau_{k\max}^2}{\Delta t_0^2} = 0, \quad (1.151)$$

где  $A = \arg \Phi^*(P_d)$ .

Решение этого уравнения, например, для случайного процесса с нормированной корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $\Delta t_0 = 0.4/\alpha$ ,  $\tau_{k\max} = 3/\alpha$ ,  $P_d = 0.99$ ,  $A = 2,3$  дает  $L_{\max} = 9$ .

Заметим, что при равномерной дискретизации  $L_{\max} = \text{ent}\left[\frac{\tau_{k\max}}{\Delta t_0} + 0,5\right] = 8$ .

Интервальная корреляционная функция равна

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Phi^*\left[\frac{\Delta t_0(J-k) + \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right] - \Phi^*\left[\frac{\Delta t_0(J-k) - \frac{\Delta}{2}}{\sqrt{2}\sigma_\xi}\right] \right\}. \quad (1.152)$$

Если  $\sigma_\xi = \frac{\Delta t_0}{6}$  и  $\Delta = \Delta t_0$ , то после промежуточных преобразований получим

$$C_x(J) = \Phi^*\left[\frac{3(2J-1)}{\sqrt{2}}\right] \rightarrow 1. \quad (1.153)$$

Заметим, что для рассматриваемой модели при заданном значении  $\Delta t_0$  минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, но коэффициент сжатия  $k_{сж} = 1$ .

**Для аддитивной случайной дискретизации**

$$\begin{cases} t_{ji} = t_{j+1} + \xi_{ji}; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}), \end{cases} \quad (1.154)$$

где  $\xi_{ji}$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_{\xi}(\xi)$ , каждая из которых расположена в диапазоне  $(0, \infty)$ .

Интервал дискретизации для этой модели равен

$$\Delta t_{ji} = \xi_{ji}. \quad (1.155)$$

Наиболее полно вероятностные характеристики этой модели исследованы в [4, 15]. Учитывая, что в практике широко применяется модель простейшего потока и потока с распределением интервалов, подчиненного гамма-распределению, частным случаем которого являются законы Эрланга, экспоненциальное, вырожденное причинное, показательное степенное, Пирсона и т.д. [15], определим их характеристики.

Для гамма-распределения длительности интервалов

$$f_{\Delta t}(\Delta t) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha} \Delta t^{\alpha-1} \exp(-\alpha\lambda\Delta t)}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.156)$$

характеристическая функция равна:

$$\varphi_{\Delta t}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha}}. \quad (1.157)$$

Отсюда характеристическая функция  $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n \Delta t_{ji}$  определяется в виде:

$$\varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n}}{(\alpha\lambda - iu)^{\alpha n}}, \quad (1.158)$$

а плотность и функция распределения вероятностей соответственно равны:

$$f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{(\alpha\lambda)^{\alpha n} Z_{nj}^{\alpha n-1} \exp(-\alpha\lambda Z_{nj})}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.159)$$

$$F_{Z_n}(Z_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} v[\alpha n, \alpha\lambda Z_n] \quad (1.160)$$

где  $v[\alpha, x] = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$  - неполная гамма-функция [16].

Моментные характеристики интервалов равны:  $m_{\Delta t} = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D_{\Delta t} = \frac{1}{\alpha\lambda^2}$ , а коэф-

фициент формы

$$k_{\phi} = \frac{2\alpha^{\alpha-1} e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.161)$$

Вероятностные характеристики для простейшего потока можно получить из выражений (1.156) - (1.161), положив  $\alpha = 1$ .

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\Delta t}(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t); \\ F_{\Delta t}(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda \Delta t); \\ \varphi_{\Delta t}(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}; \\ \varphi_{Z_{nj}}(u) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - iu)^n} \\ \\ f_{Z_{nj}}(Z_{nj}) = \frac{\lambda^n Z_{nj}^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda Z_{nj}); \\ F_{Z_{nj}} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k Z_{nj}^k}{k!} \exp(-\lambda Z_{nj}) \end{array} \right. \quad (1.162)$$

При целочисленных значениях  $\alpha = k+1 = 1, 2, 3$  гамма-распределение вырождается в распределение Эрланга [15].

Для простейшего потока, как следует из выражения (1.108), плотность распределения сумм интервалов на  $\tau_{k \max}$  имеет вид

$$f(L, \tau_{k \max}) = P(L, \tau_{k \max}) = \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}), \quad (1.163)$$

а  $L_{k \max}$  находится из уравнения

$$\sum_{L=1}^{L_{k \max}} \frac{(\lambda \tau_{k \max})^{L-1}}{(L-1)!} \exp(-\lambda \tau_{k \max}) = P_d. \quad (1.164)$$

Решение уравнения для  $L_{k \max} = 6,7766$  и  $P_d = 0,99$  дает  $L_{k \max} = 14$ .

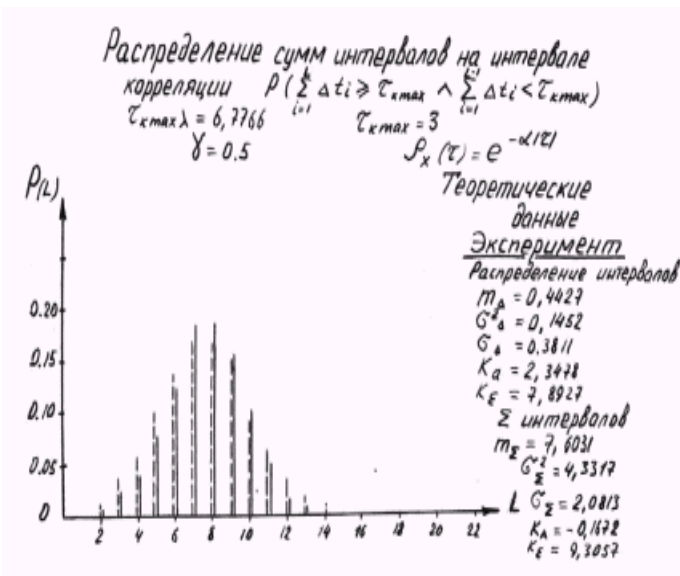


Рисунок 1.25. Распределение сумм интервалов на максимальном интервале корреляции

На рис. 1.25 приведены для примера законы распределения сумм интервалов на  $\tau_{k \max}$  для АД с предсказателем нулевого порядка с плавающей апертурой (ПНП ПА), полученные методом имитационного моделирования, и результаты определения  $L_{k \max}$  из уравнения (1.164). Результаты анализа еще раз подтверждают, что для АД ПНП ПА возможно применение модели простейшего потока.

Для гамма-распределения  $L_{k \max}$  определяется из уравнения

$$\frac{v[L_{\max} \alpha, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{\Gamma(\alpha L_{\max})} = 1 - P_d, \quad (1.165)$$

решение которого возможно только численными методами [55].

Интервальная корреляционная функция для простейшего потока примет вид

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \frac{\lambda^r \exp(-J \lambda \Delta t_0)}{r!} \left[ \exp\left(-\frac{\lambda \Delta}{2}\right) \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)^r - \exp\left(-\frac{\lambda \Delta}{2}\right) \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^r \right] \right\}, \quad (1.166)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k)} \left\{ v \left[ \alpha k, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right) \right] - v \left[ \alpha k, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right) \right] \right\}. \quad (1.167)$$

Результаты определения  $C_x(J)$  для АД ПНП ПА для модели КФ входного процесса  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$  представлены на рис. 1.26.

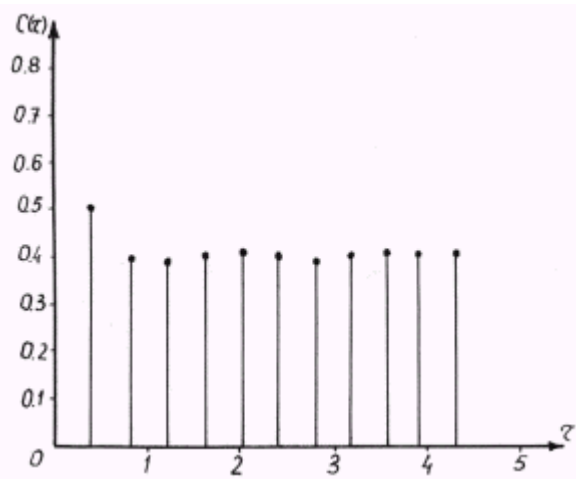


Рисунок 1.26. Интервальная корреляционная функция

Плотность распределения времени возвращения для простейшего потока

$$\varphi(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad (1.168)$$

а для гамма-распределения интервалов -

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} v[\alpha, \alpha \lambda t]. \quad (1.169)$$

Минимальный интервал дискретизации для полиномиальной модели процесса на интервале дискретизации определяется в соответствии с выражением (1.121) с учетом (1.122).

Следует отметить, что если массивы  $\{x_i, \Delta t_i\}_{i=1}^M$  записаны в память ЭВМ, то задачи определения  $\Delta t_{\min}$  и  $\lambda$  тривиальны.

Аналитическое же определение интенсивности потока для произвольного вида неравномерной дискретизации, особенно для не дифференцируемых процессов с законами распределения, отличными от нормального, встречает определенные трудности. Следовательно, интенсивность потока необходимо определять для конкретного вида неравномерной дискретизации.

Так, например, для спорадической дискретизации при числе уровней квантования  $6 \leq r \leq 300$ , как показано в [22] на обработке большого экспериментального материала, удовлетворительная аппроксимация достигается с интенсивностью  $\lambda$ , определяемой выражением

$$\lambda = \frac{\sqrt{-\rho_x''(0)}}{\pi} \sum_{i=1}^r \exp \left[ -0,5 \left( \frac{i q - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad (1.170)$$

$q$  - шаг квантования.

Для АД ПНП с фиксированной апертурой (ФА) поток является простейшим [4] с интенсивностью

$$\lambda = \frac{M \left[ \overset{\circ}{x'} \right]}{\varepsilon} = \frac{k_{\phi} \sigma_{x'}}{\varepsilon}, \quad (1.171)$$

где  $k_{\phi}$  - коэффициент формы производной процесса;

$\sigma_{x'}$  - СКО производной процесса.

Из анализа выражения (1.171) видно, что интенсивность при заданном значении уставки  $\varepsilon$  определяется, в основном, значением  $\sigma_{x'}$ , т.к. значения  $k_{\phi}$  для производных законов изменяются в небольших пределах (см. таблицу 1.12) [39].

Таблица коэффициентов формы и пикфактора для типовых законов распределения

Таблица 1.12

№	Наименование закона	$k_{\phi} = M \left[ \overset{\circ}{x'} \right] / \sigma_x$	$\eta = x_{\max} / \sigma_x$	$P_d$
1	Нормальный	0,7979	3	0,9973
2	Равномерный	0,8660	1,7320	1
3	Треугольный	0,8165	2,4495	1
4	Антимодальный I	0,9428	1,4142	1
5	Антимодальный II	0,9802	1,2603	1
6	Трапециевидный	0,8391	2,3238	1
7	Рэля	1	2,9735	0,995
8	Экспоненциальный	0,7358	5,2983	0,995
9	Лапласа	0,7071	3,7465	0,995

Выражения  $\sigma_{x'}$  для типовых дифференцируемых моделей КФ приведены в таблице 1.13.

СКО дифференцируемых процессов

Таблица 1.13

N	$K(\tau)$	$\sigma_{x'}$
1	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\alpha \sigma_x$
2	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{3} / 3$
3	$\sigma_x \exp(-\alpha^2 \tau^2)$	$\alpha \sigma_x \sqrt{2}$
4	$\sigma_x e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau )$	$\sigma_x \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$

Для недифференцируемых случайных процессов в явном виде значение  $\sigma_{x'}$  определить нельзя.

Однако, воспользовавшись аппроксимативным подходом, возможно определение параметров аппроксимирующего выражения  $K_a(\tau)$ , удовлетворяющего, напри-

мер, минимуму квадратической погрешности аппроксимации [38], а затем по параметрам модели определение  $\sigma_{x'}$ .

Так, например, при аппроксимации  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$  моделью вида  $K_a(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\beta^2 \tau^2)$  связь параметров имеет вид

$$\beta = 0,935 \alpha \quad (1.172)$$

Результаты теоретического определения интенсивности для адаптивно-временной дискретизации предсказателем пулевого порядка с плавающей апертурой (АВД ПНП ПА)  $\lambda_T$ , экспериментального, полученного методом имитационного моделирования  $\lambda_M$ , а также погрешности оценки  $\lambda$  приведены в таблице 1.14.

Интенсивность потока АВД ПНП ПА для случайного процесса

$$c K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \text{ для } \gamma = \varepsilon / \sigma_x = 0,5$$

Таблица 1.14

№	$k_\phi$	$\lambda_T$	$\lambda_M$	$\delta = (\lambda_M - \lambda_T) / \lambda_T$
1	0,7979	2,1101	2,1778	0,0705
2	0,8148	2,1547	2,1589	0,0019
3	0,8283	2,1747	2,2124	0,0173
4	0,8225	2,1752	2,2247	0,0228
5	0,7954	2,1035	2,1673	0,0303
6	0,7489	1,9805	1,9324	0,0243

Из анализа результатов видно, что независимо от вида закона распределения входного процесса, задаваемого  $k_\phi$ , погрешность оценки  $\lambda$  находится в допустимых пределах.

Аналогичным образом, воспользовавшись подпрограммами аппроксимации КФ параметрическими моделями [38], возможно определение и других моделей КФ.

**Модель периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений** является обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 + \xi_{j,i+1} - \xi_{j,i}$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Delta t}(\Delta t)$ , разряжены р-преобразованием [39].

Для нее:

$$\begin{cases} t_{ji} = \Delta t_0 \sum_{k=1}^i Y_{kj} + \xi_{\sum_{k=1}^i Y_{kj}} - \xi_0; \\ x_{ji} = x_{ji}(t_{ji}) \end{cases} \quad (1.173)$$

где  $Y_i$  - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  в соответствии с выражением (1.127), а интервал дискретизации

$$\Delta t_{ji} = Y_i \Delta t_0 + \xi_{\sum_{j=1}^i Y_i} - \xi_{\sum_{j=1}^{i-1} Y_j} \quad (1.174)$$

Плотность распределения вероятностей величины  $Z$  находится по формуле полной вероятности с гипотезами  $H_n(Y=n)$  в виде [13]



$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_z^{(n)}(z) p q^{n-1}, \quad (1.175)$$

где  $f_z^{(n)}(z)$  - плотность распределения суммы  $n$  независимых величин  $\Delta t_{ji}$ .

Пусть  $\xi$  распределена по нормальному закону  $m_\xi = 0$  и  $D_\xi = \sigma_\xi^2$ . Тогда выражение (1.175) примет вид:

$$f_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n} \sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(z - n \Delta t_0)^2}{4n \sigma_\xi^2}\right) p q^{n-1}, \quad (1.176)$$

соответствующая функция распределения -

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n \Delta t_0}{\sqrt{2n} \sigma_\xi}\right), \quad (1.177)$$

а математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\begin{cases} m_z = \frac{\Delta t_0}{p}; \\ \sigma_z^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{p} + \frac{\Delta t_0^2}{p^2}. \end{cases} \quad (1.178)$$

Плотность распределения времени возвращения определяется в виде:

$$\varphi(t) = \frac{p^2}{\Delta t_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \Phi\left(\frac{z - n \Delta t_0}{\sqrt{2n} \sigma_\xi}\right). \quad (1.179)$$

Найдем законы распределения  $\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$ , воспользовавшись ее характеристической функцией

$$\varphi_{\zeta_n}(u) = \left[ \frac{p \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)}{1 - q \exp(-u^2 \sigma_\xi^2 + iu \Delta t_0)} \right]^n \quad (1.180)$$

Отсюда плотность распределения вероятностей

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi k} \sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(\zeta_n - k \Delta t_0)^2}{4k \sigma_\xi^2}\right) C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \quad (1.181)$$

а функция распределения примет вид:

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \Phi\left(\frac{\zeta_n - k \Delta t_0}{\sqrt{2k} \sigma_\xi}\right). \quad (1.182)$$

В соответствии с выражением (1.109)  $L_{\max}$  определяется из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \Phi\left(\frac{\tau_{k \max} - k \Delta t_0}{\sqrt{2k} \sigma_\xi}\right) = 1 - P_d. \quad (1.183)$$

Интервальная корреляционная функция с учетом выражения (1.112) примет вид:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \Phi * \left[ \frac{\Delta t_0(J-k) + \Delta / 2}{\sqrt{2r} \sigma_{\xi}} \right] - \Phi * \left[ \frac{\Delta t_0(J-k) - \Delta / 2}{\sqrt{2r} \sigma_{\xi}} \right] \right\}. \quad (1.184)$$

Если  $\Delta = \Delta t_0$ , то  $C_x(J) = p$ .

Минимальный интервал дискретизации может быть близок к нулю, а коэффициент сжатия равен

$$k_{сж} = \frac{1}{p}. \quad (1.185)$$

**Модель аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений** является обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой  $\Theta_i = \xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Theta}(\Theta)$  разряжены  $p$ -преобразованием.

Для этой модели:

$$\begin{cases} t_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{Y_j} \xi_{k+\sum_{l=1}^{j-1} Y_l}; \\ x_i = x(t_i), \end{cases} \quad (1.186)$$

а интервал дискретизации равен

$$z_i = \sum_{i=1}^Y \Theta_i = \sum_{k=1}^{Y_i} \xi_{k+\sum_{l=1}^{i-1} Y_l}. \quad (1.187)$$

Плотность распределения вероятностей  $Z$  определяется в соответствии с выражением (1.175).

Пусть  $\xi$  распределена по экспоненциальному закону. Тогда  $f_z(z)$  с учетом (1.162) примет вид

$$f_z(z) = p \lambda \exp(-\lambda p z). \quad (1.188)$$

Из этого выражения видно, что все вероятностные характеристики аналогичны характеристикам простейшего потока с параметром  $\lambda p$  для аддитивной случайной дискретизации (см. выражения (1.162), (1.164), (1.166), (1.168)).

Для гамма-распределения длительности интервалов  $\Theta$  (см. (1.105)) плотность распределения

$$f_z(z) = p \alpha \lambda \exp(-\alpha \lambda z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha \lambda q z)^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.189)$$

функция распределения

$$F_z(z) = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{\nu[n \alpha, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (1.190)$$

математическое ожидание и дисперсия

$$\begin{cases} m_z = \frac{1}{p\lambda}; \\ \sigma_z^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{p} + \frac{q}{\lambda^2 p^2}, \end{cases} \quad (1.191)$$

плотность распределения времени возвращения

$$\varphi(t) = \lambda p^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda z]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.192)$$

Плотность и функция распределения вероятностей суммы  $n$  интервалов

$\zeta_n = \sum_{i=1}^n z_i$  соответственно равны:

$$f_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{(\alpha \lambda)^{\alpha n} \zeta_n^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} \exp(-\alpha \lambda \zeta_n) \quad (1.193)$$

$$F_{\zeta_n}(\zeta_n) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \frac{v[\alpha n, \alpha \lambda \zeta_n]}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (1.194)$$

С учетом выражений (1.109) и (1.195)  $L_{\max}$  находится из уравнения

$$\sum_{k=L_{\max}}^{\infty} C_{k-1}^{L_{\max}-1} p^{L_{\max}} q^{k-L_{\max}} \frac{v[\alpha L_{\max}, \alpha \lambda \tau_{k \max}]}{d(\alpha L_{\max})} = 1 - P_d \quad (1.195)$$

с использованием одного из численных методов [55].

Интервальная корреляционная функция определяется в виде:

$$C_x(J) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} C_{r-1}^{k-1} p^k q^{r-k} \left\{ \frac{v\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 + \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} - \frac{v\left[\alpha r, \alpha \lambda \left(J \Delta t_0 - \frac{\Delta}{2}\right)\right]}{\Gamma(\alpha r)} \right\}. \quad (1.196)$$

Интенсивность и минимальный интервал дискретизации определяются аналогично как и для модели аддитивной случайной дискретизации, а коэффициент сжатия для рассматриваемых законов равен:

$$k_{сж} = \frac{1}{p\lambda\Delta t_0}. \quad (1.197)$$

Рассмотренные модели, естественно, не являются исчерпывающими, но они покрывают широкий класс практических задач.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

### 2.1. Моделирование временных рядов типа «белого» шума

Как правило, в качестве первичного случайного процесса, с помощью которого осуществляется моделирование образцовых сигналов, является процесс типа «белого» шума, распределенный по равномерному или нормальному законам. В дальнейшем для получения случайного сигнала с заданными статистическими характеристиками его подвергают различным линейным и нелинейным преобразованиям. Существуют различные способы получения первичного процесса:

- с использованием физических датчиков случайных процессов, построенных на различных физических эффектах;
- с помощью специальных программ формируется достаточно большая последовательность псевдослучайных чисел, удовлетворяющая принятым тестам случайности - программный;
- с использованием таблиц случайных чисел - табличный;
- с использованием специального процессора для генерирования псевдослучайной последовательности - программно-аппаратный.

В таблице 2.1 указаны достоинства и недостатки методов генерирования.

Сравнительная оценка методов генерирования случайных процессов  
(последовательностей)

Таблица 2.1

Метод	Достоинства	Недостатки
Датчиков	Запас чисел неограничен. Сверхбыстрое получение	Нестабильность физических генераторов. Невозможность повторение последовательности. Необходимость специальной аппаратуры.
Программный	Проверка однократная. Возможность воспроизведения чисел. Простота реализации. Отсутствие специальной аппаратуры	Запас чисел ограничен (периодичность процесса). Сравнительно малое быстродействие.
Табличный	Высокое быстродействие. Хорошая случайность. Возможность воспроизведение чисел.	Запас чисел ограничен. Большой объем занимаемой памяти.
Программно-аппаратный	Высокое быстродействие. Возможность воспроизведение чисел.	Запас чисел ограничен. Требуется специальный процессор.

Из анализа таблицы 2.1. видно, что программный метод генерирования псевдослучайных последовательностей (ПСП) самый удобный с практической точки зрения.

Обычно современные ЭВМ в математическом обеспечении имеют встроенную функцию генерирования ПСП с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0,1]$ , используя которую можно решать большинство задач моделирования образцовых сигналов. Но иногда возникает необходимость генерирования независимых слу-

чайных процессов. Наилучшие из известных сегодня датчиков случайных чисел представляют частные случаи схемы, предложенной Д.Ч. Леммером [26]:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m, \quad (2.1)$$

где  $x_0 > 0$  - начальное значение;

$a > 0$  - множитель;

$c \geq 0$  - приращение;

$m$  - модуль ( $m > x_0, m > a, m > c$ ).

Обычно  $m$  задается на единицу больше максимального числа, которое можно записать в машинном слове.

Такая последовательность называется линейной конгруэнтной последовательностью. Для получения равномерно распределенной в интервале  $[0,1]$  последовательности необходимо выполнить преобразование:

$$u_n = \frac{x_n}{m}. \quad (2.2)$$

Конгруэнтные последовательности всегда «зацикливаются». Это свойство присуще всем последовательностям вида  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Повторяющийся цикл называется периодом.

Если  $C=0$ , то процесс генерации случайных чисел происходит несколько быстрее, но в то же время ограничение  $C=0$  уменьшает длину периода. Методы генерирования с  $C=0$  и  $C \neq 0$  называют соответственно: мультипликативным конгруэнтным и смешанным конгруэнтным методами.

Рекомендации по выбору числа  $m$  сводятся к следующему -  $m$  необходимо выбрать достаточно большим, так как длина периода не может быть больше  $m$ . Другой фактор, влияющий на выбор  $m$ , - это скорость выработки чисел. Так как деление - сравнительно медленная операция, то ее можно избежать. Для этого необходимо выбрать  $m$  равным размеру слова. При выборе  $m$ , равном максимальному целому числу, размещающемуся в машинном слове, младшие разряды числа  $x$  намного менее случайны случайных старших. Если  $m$  равно максимальному целому числу в машинном слове  $\pm 1$ , то такой ситуации не возникает. Но для большинства приложений младшие разряды не существенны, и выбор  $m$  равном максимальному целому числу в машинном слове является вполне удовлетворительным, т.е. можно принять  $m=2^l$ , где  $l$  - длина машинного слова.

Выбор множителя  $a$ : для любой последовательности, предназначенной для использования в качестве источника случайных чисел, важен большой период.

Теорема 1. Длина периода линейной конгруэнтной последовательности равна  $m$  тогда и только тогда, когда

1.  $C$  и  $m$  - взаимно простые числа;
2.  $b = a - 1$  - кратно  $p$  для любого простого  $p$ , являющимся делителем  $m$ ;
3.  $b$  кратно 4, если  $m$  кратно 4.

Замечание: когда период имеет длину  $m$ , каждое число от 0 до  $m-1$  встречается за период ровно один раз, следовательно выбор  $x_0$  не влияет в этом случае на длину периода.

#### Мультипликативный метод:

$$x_{n+1} = a x_n \pmod{m}; \quad (2.3)$$

при  $m=2^{1-2}$  получается последовательность с тах периодом, алгоритм построения которой приведен ниже [26]:

1. выбрать в качестве  $x_0$  произвольное нечетное число;
2.  $a=8t\pm 3$ , где  $t$  - любое целое положительное число;
3. вычислить  $ax_0$ ; полученное число содержит не более 21 значащих разрядов; взять 1 младших значений разрядов в качестве  $x_1$ , остальные отбросить;
4.  $u_1 = x_1/m$ ;
5.  $x_{i+1} = 1$  младших разрядов  $ax_i$ ; вернуться к пункту 4.

### Смешанный метод:

Преимущество данной процедуры в том, что можно так подобрать  $a$  и  $s$ , что эта формула определит последовательность, пробегающую все целые значения от 0 до  $m-1$ . Т.е. если выполняются условия теоремы 1, то можно получить ПСП с периодом  $=2^l$ .

С вычислительной точки зрения смешанный метод сложнее на одну операцию сложения мультипликативного метода. Однако свобода выбора параметра  $s$  открывает дополнительные возможности уменьшения сериальной автокорреляции.

Общие рекомендации по выбору параметров сводятся к следующему:

1. множитель  $a$  не должен быть близок к простому рациональному кратному модуля  $m$ , в противном случае возникает сериальная корреляция пар чисел;
2. множитель  $a$  не должен быть близок к простому рациональному кратному квадратного корня модуля  $m$ ; эта близость приведет к сериальной корреляции троек чисел;
3. не следует выбирать множитель  $a$  так, чтобы он содержал мало единиц в двоичном представлении;
4. множитель  $a$  должен быть достаточно велик;
5. особенно внимательно надо относиться к выбору множителя  $a$  при реализации генератора на ЭВМ с малой длиной слова; для того, чтобы обеспечить хорошие статистические характеристики генератора, в этом случае может понадобиться представление чисел с двойной точностью.

Период линейной конгруэнтной последовательности чрезвычайно велик. Обычно, если  $m$  приближается к длине машинного слова, то период  $\approx 10^9$  и больше.

Так как генератор «белого шума» является базовым генератором при решении разнообразных задач, связанных с генерированием случайных величин, процессов и последовательностей с заданными статистическими характеристиками проведем его исследование.

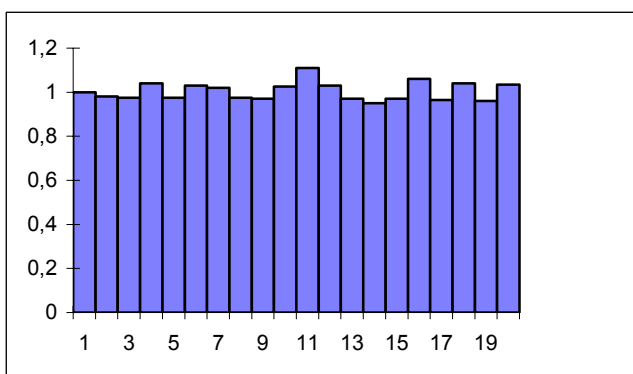


Рисунок 2.1. Гистограмма «белого» шума

На рис 2.1. представлена гистограмма генератора «белого шума» с равномерным законом распределения в диапазоне  $[0,1]$ , построенная для  $N=10000$ .

Результаты обработки данных и параметры закона распределения представлены в таблице 2.2. Вычисленное значение  $\chi^2$  соответствует достоверности  $P=0,6$ .

## Результаты экспериментальных исследований генератора «белого» шума

Таблица 2.2.

$\Delta$	$x_{\min}$	$x_{\max}$	$m_x$	$D_x$	a	b	$\chi^2$
0,05	0,00002	0,9999	0,4999	0,0834	-0,0003	1,003	15,66

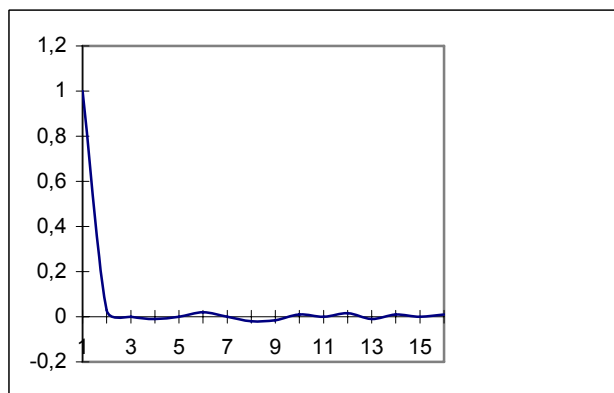


Рис. 2.2. Корреляционная функция «белого шума»

Нормированная корреляционная функция генератора «белого» шума представлена на рис. 2.2.

Результаты исследования показывают неидеальность генератора «белого шума». Однако, как показывает практика, точностные характеристики генератора являются достаточными при решении разнообразных задач моделирования входных воздействий [62].

## 2.2. Моделирование ПСП с заданным законом распределения

Для генерирования ПСП с заданным законом распределения (основные виды моделей приведены в приложении П1) применяются различные методы [11, 26, 47, 62]:

- метод нелинейного преобразования (обратной функции);
- приближенный метод (метод кусочно-линейной аппроксимации закона распределения);
- метод исключения (метод Неймана) и т.д.

Рассмотрим более подробно первые два.

### 2.2.1. Метод обратной функции

Для решения задачи моделирования ПСП с заданным законом распределения случайный процесс подвергается нелинейному преобразованию. Теоретической базой для определения вида и характеристик нелинейной функции является теория функций случайного аргумента [40].

Допустим, случайная величина  $X$  имеет плотность распределения вероятности  $f_x(x)$ , а необходимо получить выходную величину  $Y$  с плотностью распределения вероятностей  $f_y(y)$ . Таким образом, мы должны определить вид нелинейной функции преобразования  $y=g(x)$ .

Известно, что

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy. \quad (2.4)$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.5)$$

Допустим, что обратная функция преобразования

$$x = t(y). \quad (2.6)$$

Тогда

$$t'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x)}. \quad (2.7)$$

Если в качестве входной ПСП выбрать «белый шум» с  $f_x(x) = 1$ , то  $x = t(y) = F_y(y)$ . (2.8)

Отсюда можно определить вид нелинейной функции преобразования  $y = g(x) = F_y^{-1}(x)$ . (2.9)

Графическая интерпретация метода инверсного преобразования представлена на рис. 2.3.

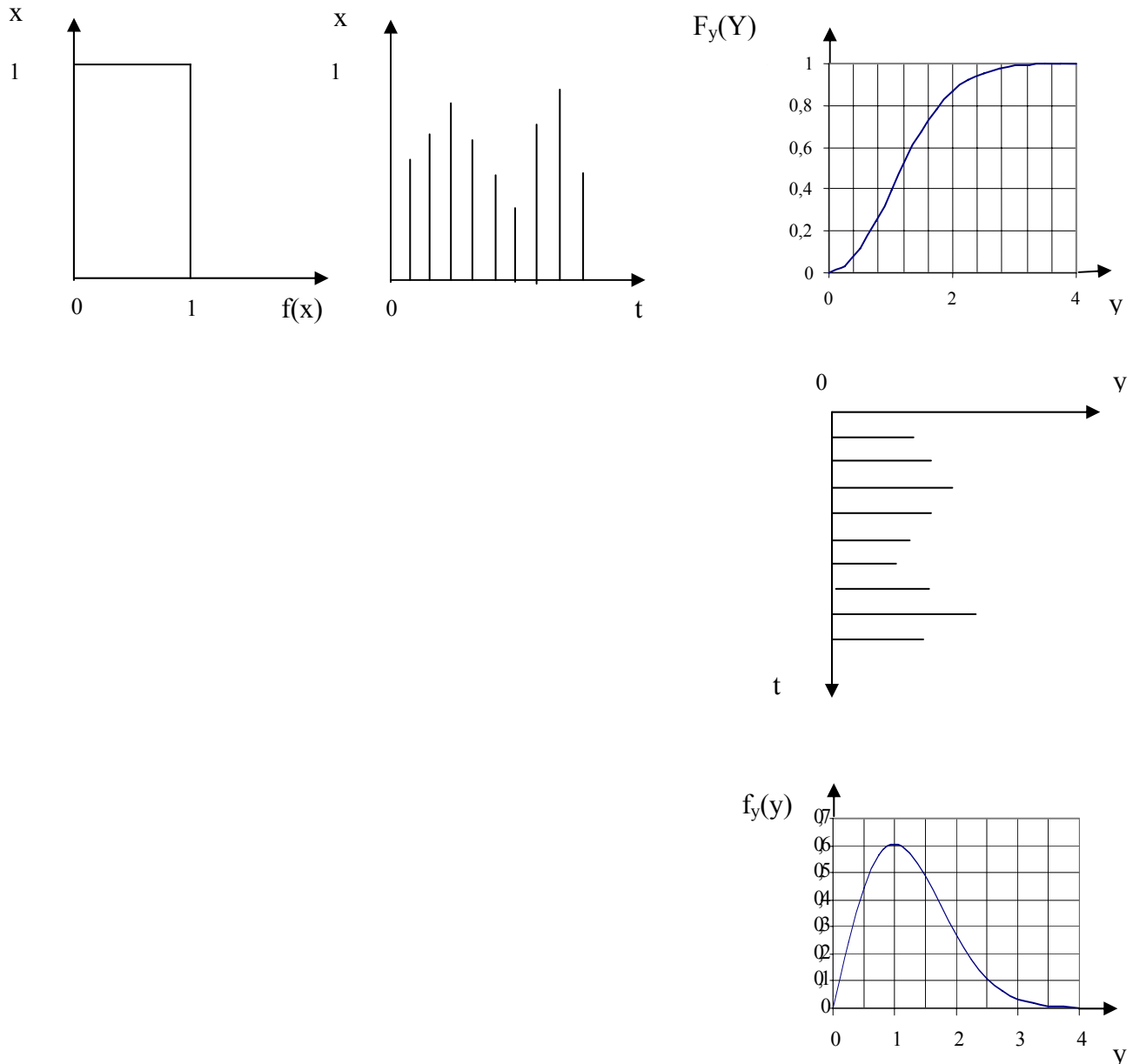


Рисунок 2.3. Моделирование ПСП с заданным видом закона распределения вероятностей

Обычно можно найти аналитическое решение  $F_y^{-1}(x)$  только для ограниченно-го числа случаев. Примеры интегральных функций распределения и обратных им функций приведены в приложении П.3.



### 2.2.2. Приближенный метод моделирования

Для большинства случаев интегральную функцию нельзя найти аналитически и тогда применяют приближенный метод моделирования, который основан на использовании ПСП с равномерным законом распределения, кусочно-линейной интерполяции функции распределения и решении задачи обратной интерполяции.

При кусочно-линейной интерполяции функцию распределения представим в виде:

$$F_y(y_i) = \sum_{l=1}^L \left\{ F_y(y_{l-1}) + \frac{y_i - y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}} [F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})] \right\} \mathbb{1}(y_{l-1} \leq y_i < y_l), \quad (2.10)$$

где  $i=1,2,\dots,N$ .

Отсюда найдем обратную функцию:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[ y_{l-1} + \frac{F_y(y_i) - F_y(y_{l-1})}{F_y(y_l) - F_y(y_{l-1})} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1}[F_y(y_{l-1}) \leq F_y(y_i) < F_y(y_l)]. \quad (2.11)$$

С учётом того, что при генерировании ПСП  $x_l = F_y(y_l)$  получим,

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[ y_{l-1} + \frac{x_i - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} (y_l - y_{l-1}) \right] \mathbb{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l). \quad (2.12)$$

Так как координаты узловых точек  $F(y_l)$  рассчитываются заранее, окончательно получим:

$$y_i = \sum_{l=1}^L \left[ y_{l-1} + (x_i - x_{l-1}) A_l \right] \mathbb{1}(x_{l-1} \leq x_i < x_l), \quad (2.13)$$

$$\text{где } A_l = \frac{y_l - y_{l-1}}{x_l - x_{l-1}}.$$

Отсюда следует, что необходимо, задавшись допустимой погрешностью восстановления  $F_y(y)$   $\delta$ , видом интерполяции, определить узловые точки  $\{y_l - F_y(y_l)\}$  и  $A_l$ . Затем, воспользовавшись формулой (2.11), сгенерировать ПСП с требуемым законом распределения.

Для удобства дальнейших расчётов в приложении П.4. приведены  $F_y(y)$ , для типовых законов распределения, представленные в виде рядов. Такое представление позволяет определить значения  $F_y(y)$  с заданной погрешностью и уменьшить время решения задачи.

Выбор допустимой погрешности аппроксимации функции распределения  $F_y(y)$  определяется в зависимости от  $N$  - числа генерируемых чисел ПСП, допустимого уровня значимости  $P$ , выбранного критерия и его значения.

Наиболее целесообразно в этом случае применить критерий Колмогорова [12], связанный с погрешностью восстановления:

$$\delta = \max \left| F_y^{(N)}(y) - F_y(y) \right|, \quad (2.14)$$

где  $F_y^{(N)}(y)$  - функция распределения, определяемая экспериментально на выборке размером  $N$ ;

$F_y(y)$ - теоретическая функция распределения.

Для определенной погрешности восстановления  $\delta$  и объема выборки  $N$  определяется

$$\lambda = \delta \sqrt{N}. \quad (2.15)$$

Гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости  $P$

$$\lambda < \lambda_{1-P}. \quad (2.16)$$

В приложении П.7. приведены результаты расчёта  $\lambda$  для различных  $\delta$  и  $N$ .

Задавшись допустимым уровнем значимости, например  $P=0,3$ , определим  $\lambda=0,97$ . Гипотеза принимается, если  $\lambda < 0,97$ . Так, если необходимо сгенерировать  $N=5000$  чисел, допустимая погрешность восстановления  $\delta=0,01$ .

Для расчёта узловых точек функции распределения  $F_y(Y_i)$  необходимо выбрать вид интерполяции, определить диапазон изменения  $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$  при заданной доверительной вероятности, интервал дискретизации аргумента  $\Delta y$  и число узловых точек  $M$ :

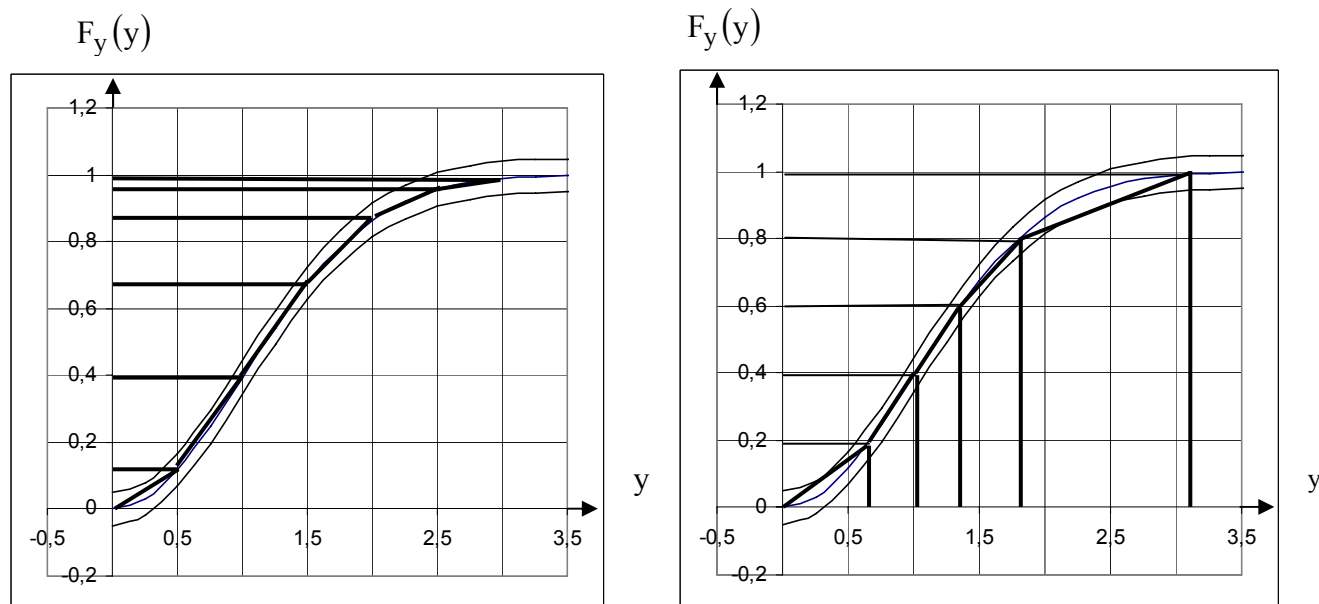
$$M = \text{ent} \left[ \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\Delta y} \right] + 1. \quad (2.17)$$

В случае применения линейной интерполяции

$$\Delta y = \sqrt{\frac{8\delta}{|F_y''(y)|_{\max}}}. \quad (2.18)$$

В приложении П.5 приведены результаты определения  $|F_y''(y)|_{\max}$  и  $[y_{\min}, y_{\max}]$ .

При генерировании ПСП, т.е. решении задачи обратной интерполяции, возможны три варианта:



а)  $\Delta y = \text{const}$

б)  $\Delta x = \text{const}$

Рисунок 2.4. Формирование параметров кусочно-линейной модели

1.  $\Delta y_1 = \text{const}, \Delta x_1 = \text{var}$  (см. рис.2.4. а));
2.  $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{const}$  (см. рис.2.4. б));
3.  $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{var}$  (см. рис.2.5).

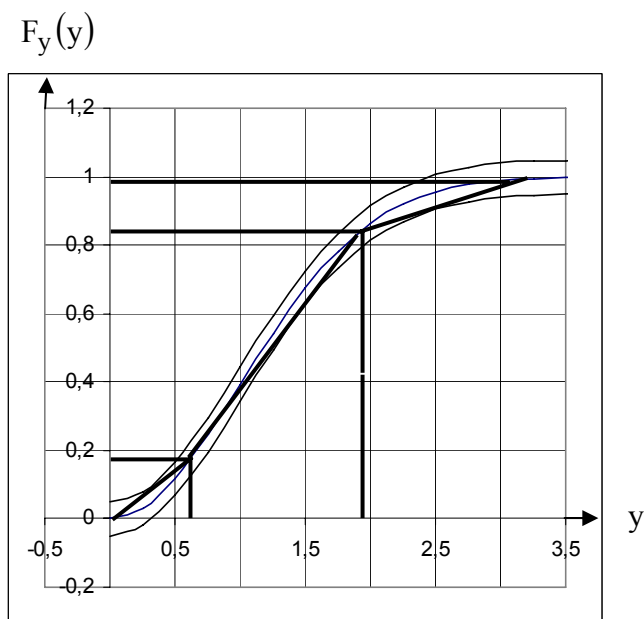


Рисунок 2.5. Формирование параметров кусочно-линейной модели  
 $\Delta y_1 = \text{var}, \Delta x_1 = \text{var}$

В первом варианте упрощается процедура нахождения узловых точек (интервал дискретизации определяется в соответствии с выражением (2.18)), но больше время генерирования, т.к. необходимо определять участок интерполяции. Во втором - сложнее процедура определения узловых точек, но меньше время генерирования, т.к. упрощается процедура нахождения участка интерполяции. Заметим, что решение третьей задачи аналогично решению задачи адаптивно-временной дискретизации сигнала при выбранной модели восстановления [4]. В этом случае интервал  $\Delta y_1$  определяется в соответствии с выражением:

$$\Delta y_1 = \sqrt{\frac{8\delta}{[F_y''(y)]}}. \quad (2.19)$$

Достоинствами данного метода являются:

- возможность применения его для моделирования случайных величин со сколь угодно сложным законом распределения;
- значительно меньшее время генерирования ПСП по сравнению с методом инверсного преобразования за счёт уменьшения количества интервалов.

Недостаток - необходимость проведения некоторой подготовительной работы перед непосредственным применением процедуры генерирования ПСП (разбиение области распределения  $y$  на интервалы).

В качестве примера рассмотрим генерирование ПСП, имеющей распределение модуля многомерного вектора:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & y > 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = \int_0^{\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-t} t^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} dt. \quad (2.21)$$

Для генерирования ПСП необходимо задать параметры распределения. Пусть  $\sigma=1, n=4$ . Тогда выражение (2.20) примет вид:

$$F(y) = \int_0^{y^2/2} e^{-t} t dt \quad (2.22)$$

Результаты расчёта координат узловых точек для приведенной погрешности интерполяции 1% приведены в таблице 2.3.

Координаты узловых точек.

Таблица 2.3

y	0	0,7	1,3	2,5	3,1	3,9	4,2	4,3
F(y)	0	0,026	0,207	0,819	0,952	0,996	0,998	0,999

Из таблицы 2.3 видно, что кривая распределения имеет восемь узлов и семь линейных участков.

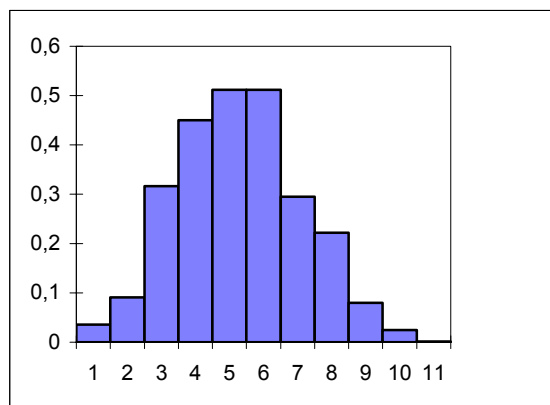


Рисунок 2.5. Гистограмма ПСП

Гистограмма сгенерированной ПСП приведена на рис. 2.5.

Для проверки достоверности результатов генерирования использовался критерий Пирсона [10], а сами результаты представлены в таблице 2.4.

Результаты расчётов.

Таблица 2.4

J	$p_i$	$p_i^*$	$p_i^* / h$	$(p_i^* - p_i) / p_i$
(0- 0,4)	0,00316	0,015	0,036	0,0114335
(0,4 - 0,8)	0,039	0,036	0,091	0,0001030
(0,8 - 1,2)	0,121	0,126	0,316	0,0002900
(1,2 - 1,6)	0,215	0,181	0,450	0,0056300
(1,6 - 2,0)	0,217	0,205	0,512	0,0007500
(2,0 - 2,4 )	0,192	0,205	0,512	0,0008920
(2,4 - 2,8)	0,115	0,118	0,295	0,0000900
(2,8 - 3,2)	0,061	0,088	0,222	0,0012608
(3,2 - 3,6)	0,026	0,032	0,080	0,0010600
(3,6 - 4,0)	0,008	0,010	0,025	0,0003000
(4,0 - 4,4)	0,001	0,0009	0,0013	0,0020000

Расчитанное значение  $\chi^2 = 1,54$ , число степеней свободы  $k=11-3 = 8$ . В приложении П.6 при выбранном уровне значимости  $\alpha = 0,05$  находим  $\chi_{k,\alpha}^2 = 15,51$ . Так как  $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$ , сгенерированная ПСП согласуется с требуемым законом распределения.

Для сокращения времени генерирования увеличим погрешность интерполяции до тех пор, пока критерий согласия  $\chi^2$  перестанет выполняться.

Численные значения узлов интерполяции для приведенной погрешности 2% представлены в таблице 2.5.

Узлы интерполяции.

Таблица 2.5.

Y	0	0,98	2,55	3,75	4,3
F(y)	0	0,080	0,850	0,985	0,999

Проведя аналогичные расчёты, получим, что  $\chi^2 = 6,55$ , и условие  $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$  выполняется.

Результаты расчёта  $\chi^2 = 12,9$  для приведенной погрешности 3% (узлы функции распределения представлены в таблице 2.6), показывают, что условие  $\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2$  выполняется.

Узлы интерполяции.

Таблица 2.6.

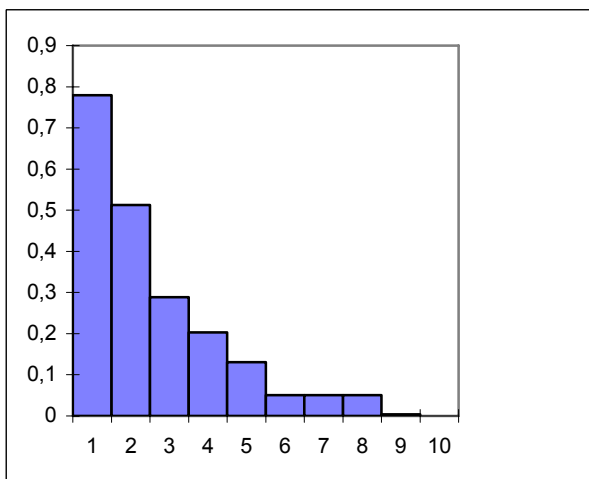
Y	0	1,1	3,0	4,3
F(y)	0	0,12	0,94	0,999

При дальнейшем увеличении приведенной погрешности интерполяции критерий согласия нарушается.

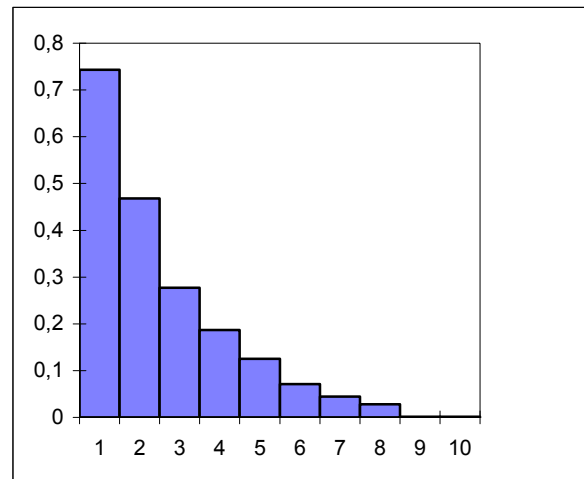
Проведем исследование генераторов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. В отличие от предыдущего примера, в этом случае возможно применения метода инверсного преобразования (см. приложение П.3). Результаты сравним с приближенными методами генерирования.

На рис. 2.6 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием инверсной функции. В этом случае  $\chi^2 = 7,579$ ,  $r = 7$ ,  $P = 0,4$ .

На рис. 2.6 б) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования ПСП  $\Delta x = \text{const}$ . Для рассматриваемого примера  $\chi^2 = 7,054$ ,  $r = 7$ ,  $P = 0,4$ .



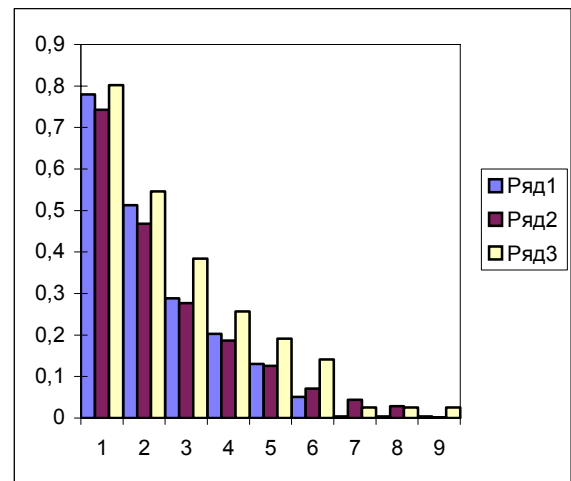
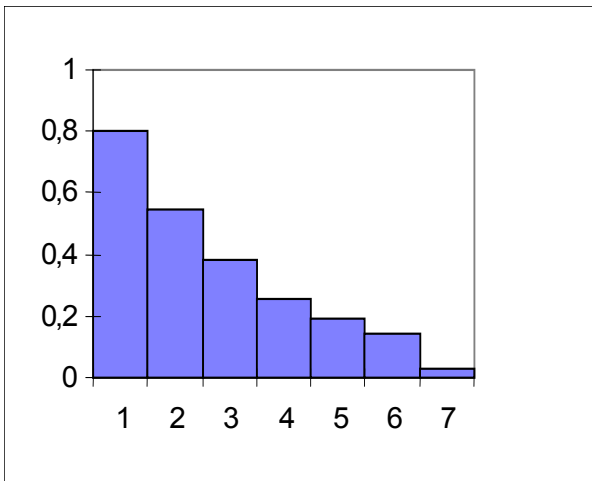
а)



б)  $\Delta x = \text{const}$

Рисунок 2.6. Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.7 а) приведены результаты моделирования ПСП, распределенной по экспоненциальному закону с использованием приближенного метода генерирования  $\Delta y = \text{const}$ . Для рассматриваемого примера  $\chi^2 = 7,33$ ,  $r = 5$ ,  $P = 0,2$ .



а)  $\Delta y = \text{const}$  б)  
Рисунок 2.7. Гистограммы экспоненциального распределения

На рис. 2.7 б) приведены все три гистограммы, полученные в ходе генерирования с использованием различных методов ПСП, распределенных по экспоненциальному закону. Ряд 1- инверсный метод преобразования, ряд 2 -  $\Delta x = \text{const}$  , ряд 3 -  $\Delta y = \text{const}$ .

Таким образом, результаты экспериментальных исследований различных генераторов экспоненциального распределения подтверждают возможность применения приближенного метода генерирования ПСП.

Проведенные исследования для других законов распределения показали, что для обеспечения требуемого качества генерирования ПСП (в смысле критерия Пирсона) достаточно осуществить интерполяцию функции распределения с приведенной погрешностью 1%. В этом случае количество узлов интерполяции для большинства законов меньше 10, что значительно уменьшает общее время моделирования.

Следует отметить, что в ряде случаев при генерировании ПСП более целесообразно применять более простые методы. Так, например, при генерировании ПСП, распределенной по нормальному закону, можно воспользоваться теоремой Ляпунова [12].

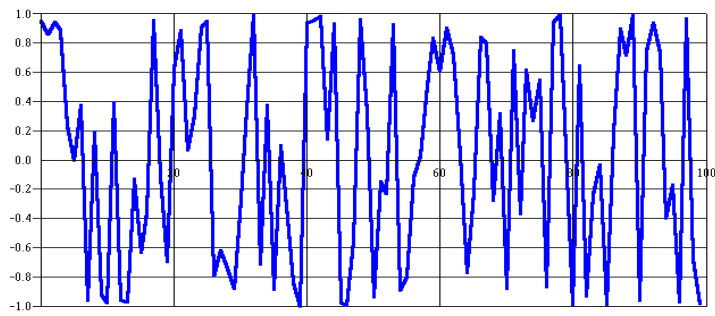
Практика показала, что ПСП можно определить в виде

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n/2}{(n/2)^{1/2}}, \quad (2.23)$$

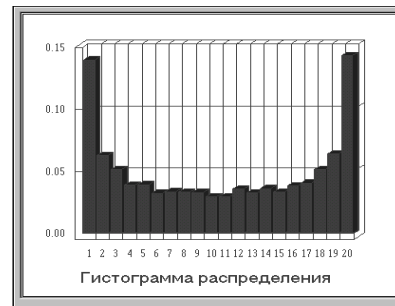
где  $x_i$  - случайная величина, распределенная по равномерному закону, а  $n$  находится в диапазоне  $6 \leq n \leq 12$ .

Для получения временного ряда из сгенерированной ПСП необходимо задать интервал дискретизации  $\Delta t_0$ . Так как отсчеты ПСП некоррелированы (см. рис. 2.2), интервал дискретизации может быть любым. Его величина устанавливается исследователем самостоятельно в зависимости от характера решаемой задачи.

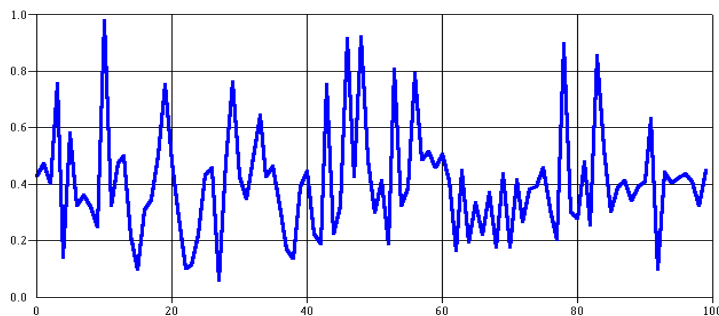
На рис. 2.9 приведены примеры реализаций ПСП с заданными законами распределения, полученные с помощью автоматизированной системы [2] и соответствующие им гистограммы. Забегая вперед, отметим, что с помощью этой системы возможно определение аналитических выражений законов распределения сгенерированной ПСП и проверка качества генерирования с помощью критериев согласия.



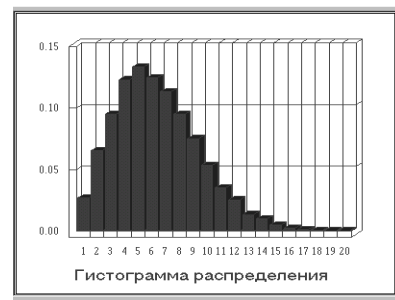
Процесс, распределенный по закону арксинуса



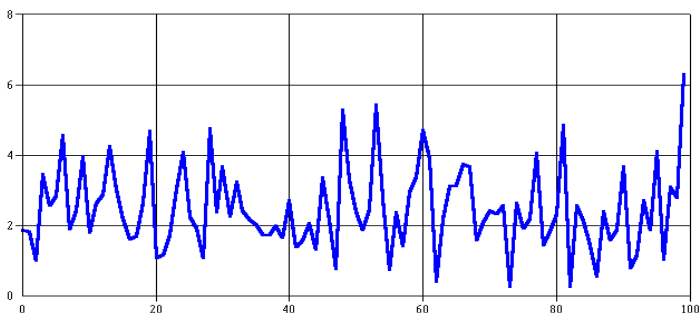
Гистограмма распределения



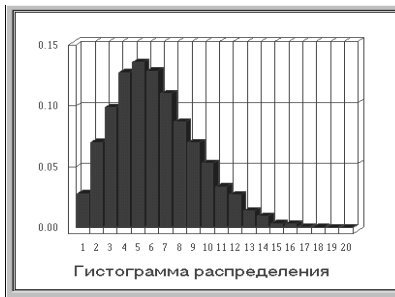
Процесс, распределенный по закону Вейбулла



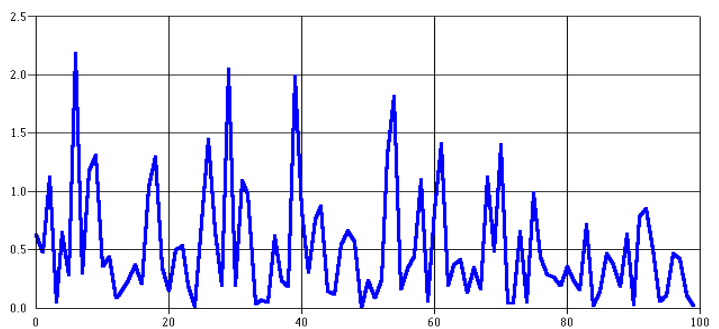
Гистограмма распределения



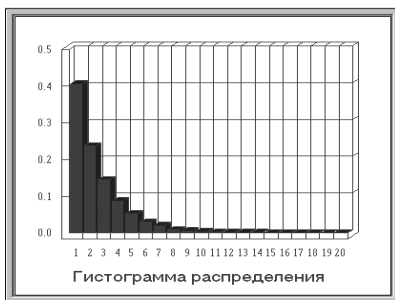
Процесс, распределенный по закону Рэля



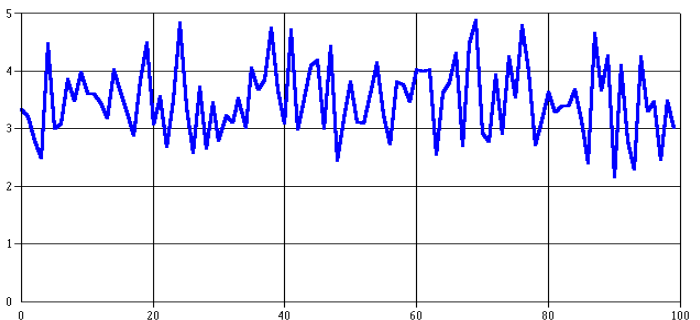
Гистограмма распределения



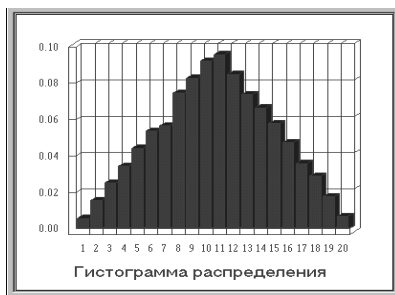
Процесс, распределенный по экспоненциальному закону



Гистограмма распределения



Процесс, распределенный по закону Симпсона



Гистограмма распределения

Рисунок 2. 8. ПСП с заданным видом закона распределения

### 2.3. Моделирование потоков событий с заданными свойствами

Приведенные основные соображения, рассмотренные в подразделе 2.2, позволяют легко генерировать на ЭВМ реализации различных однородных потоков событий. Формально моделирование подобных потоков мало чем отличается от моделирования случайных величин.

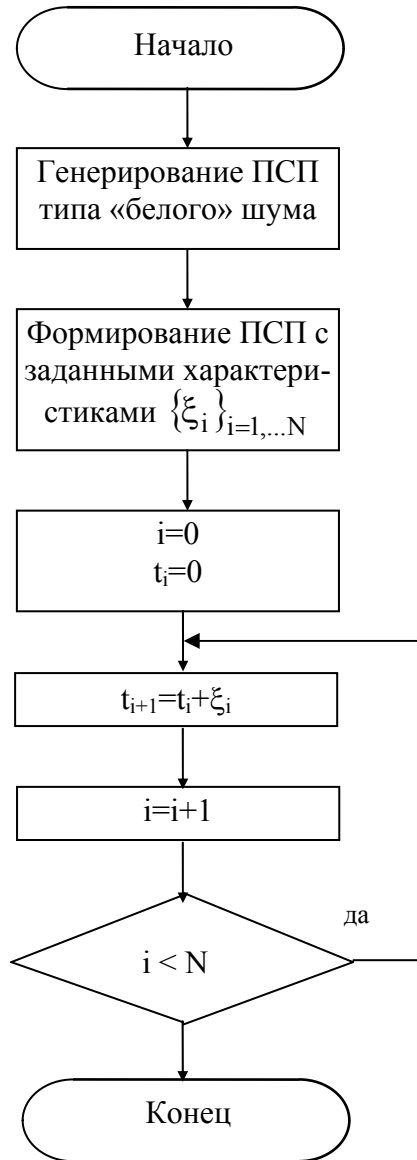


Рисунок 2.9. Блок-схема моделирования потока событий

Для этого необходимо сгенерировать случайные величины  $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,N}$  с законом распределения  $f_\xi(\xi)$ . Суммирование получаемых реализаций позволит определить моменты наступления событий в системе (см. рис. 2.9):

$$t_{i+1} = t_i + \xi_i \quad (2.24)$$

Отметим, что подобные потоки относятся к классу потоков с аддитивной дискретизацией. В качестве законов распределения  $f_\xi(\xi)$  в зависимости от решаемой задачи могут использоваться самые различные законы:

- экспоненциальный;
- распределение Эрланга;
- равномерное распределение;
- треугольное распределение 1-го и 2-го типов и т.п.

Для простейшего потока событий или потока Пуассона, широко применяемого на практике, число событий  $k$ , наступивших на интервале времени  $[0, t]$  - дискретная случайная величина, определяемая законом распределения Пуассона:

$$P[k] = \frac{a^k}{k!} e^{-a} : k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

с параметром  $a = \lambda t$ ,  $\lambda$  - интенсивность или параметр потока.

Следует, однако, помнить, что при таком способе моделирования потока разыгрывается лишь общее число событий на интервале  $[0, t]$ , а не каждое отдельное событие.

Формула (2.25) может быть распространена и на случай интервала времени  $[t_1, t_2]$

$$P[k] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \quad (2.26)$$

При этом  $k$  - число событий, наступивших на интервале времени  $[t_1, t_2]$ .

Известно, что закон распределения интервалов простейшего потока экспоненциальный [15]



$$f_{\xi}(\xi) = \lambda e^{-\lambda \xi}, \lambda > 0, \xi > 0, \quad (2.27)$$

что дает более простой способ генерирования простейшего потока, - формирование на ЭВМ дискретной случайной величины с законом распределения (2.27).

Следует заметить, что нередко моделирование случайных величин, определяющих поток событий в системе, проводится с использованием специальных методов. Так, например, моделирование случайных величин, распределенных по нормальному закону, законам Симпсона, более целесообразно проводить путем суммирования случайных величин, распределенных по равномерному закону, а для закона Эрланга - суммированием случайных величин, распределенных по экспоненциальному

закону. Рассмотрим особенности генерирования типовых рекуррентных потоков, модели которых представлены в подразделе 1.8.

• Значение  $j+1$ -ого отсчёта регулярного потока с  $p$ -преобразованием (периодическая дискретизация со случайными пропусками наблюдений) определяется выражением:

$$t_j = \Delta t_0 \sum_{i=1}^j Y_i, \quad (2.28)$$

где  $\Delta t_0$  - интервал принудительной дискретизации;

$Y$  - случайная величина, распределенная по сдвинутому на единицу закону Паскаля с параметром  $p$  [13]:

$$P(Y = m) = pq^{m-1}, m=1, 2, \quad (2.29)$$

Выражение для генерирования удобнее представить в следующем виде

$$t_{j+1} = t_j + k\Delta t_0, \quad (2.30)$$

где  $k$  - случайная величина (см. рис. 2.10).

• Значение  $i+1$ -ого отсчёта регулярного потока с «дрожанием» равно:

$$t_{i+1} = i\Delta t_0 + \xi_i. \quad (2.30)$$

где  $\xi_i$  - последовательность независимых случайных величин с плотностью распределения вероятностей  $f_{\xi}(\xi)$ , каждая из которых расположе-

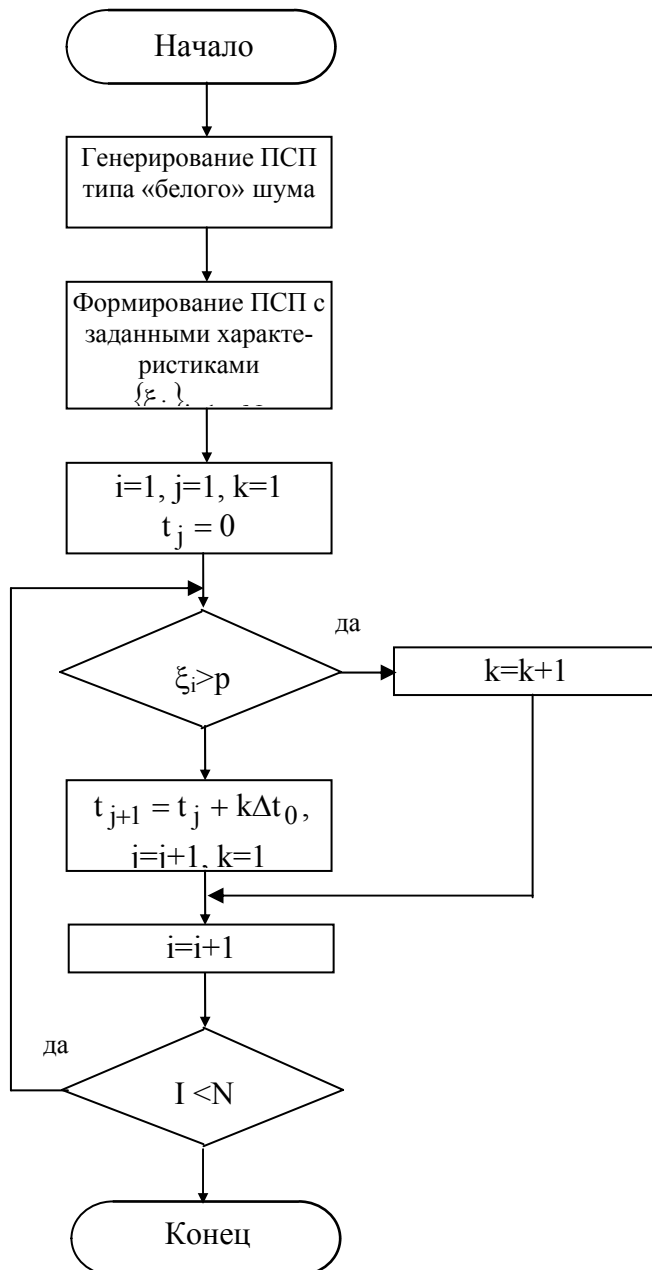


Рисунок 2.10. Блок-схема моделирования регулярного потока событий с  $p$ -преобразованием

на в диапазоне  $\left(-\frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{2}\right)$  (см. рис. 2.11).

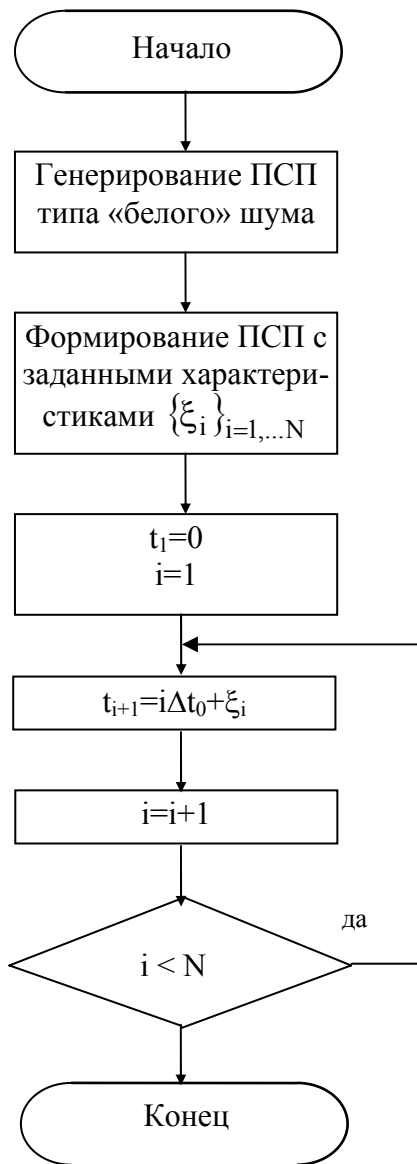


Рисунок 2.11. Блок-схема моделирования регулярного потока с «дрожанием»

Следует подчеркнуть, что при моделировании потоков с аддитивной дискретизацией на ЭВМ всегда будет наблюдаться процесс «дрожания», обусловленный принудительной дискретизацией интервалов между событиями потока (конечная разрядная сетка). Это обстоятельство, когда им нельзя пренебречь, необходимо учитывать.

Таким образом, применяя в различных сочетаниях разработанные алгоритмы моделирования базовых потоков, можно генерировать более сложные случайные потоки (см. рис. 2.12).

Рассмотренные модели случайных потоков, естественно, не являются исчерпывающими. Часто при решении прикладных задач возникает необходимость в применении альтернирующих потоков, блок-схема программы генерирования которых приведена на рис. 2.13. В этом случае выражения для определения времени отсчёта в потоке определяются следующими выражениями:

Базовые модели рекуррентных потоков событий позволяют путём их сочетания получить более сложные модели потоков:

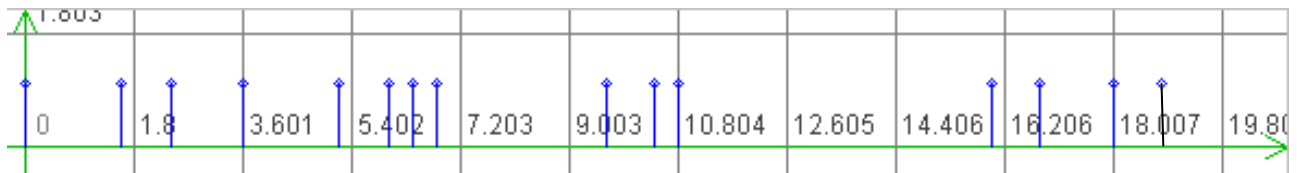
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой  $\xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$  разряжены р-преобразованием;

- аддитивной случайной дискретизации с «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации, интервалы которой  $\xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$  подвержены «дрожанию»;

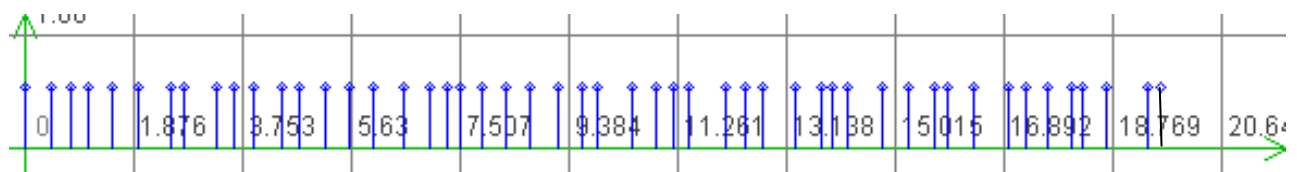
- аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений и «дрожанием», являющейся обобщением модели аддитивной случайной дискретизации с пропусками наблюдений, интервалы которой  $\xi_i$  с плотностью распределения вероятностей  $f_\xi(\xi)$  разряжены р-преобразованием и подвержены «дрожанию»;

- периодической дискретизации с «дрожанием» и пропусками наблюдений, являющейся обобщением модели периодической дискретизации с «дрожанием», интервалы которой  $\Delta t_i = \Delta t_0 + \xi_i - \xi_{i-1}$  с плотностью распределения вероятностей  $f_{\Delta t}(\Delta t)$  разряжены р-преобразованием и т.д.

$$\begin{cases} t_1 = 0; \\ t_2 = t_1 + \xi_1^{(1)}; \\ t_3 = t_2 + \xi_1^{(2)}; \\ t_4 = t_3 + \xi_2^{(1)}; \\ \dots \end{cases} \quad (2.31)$$



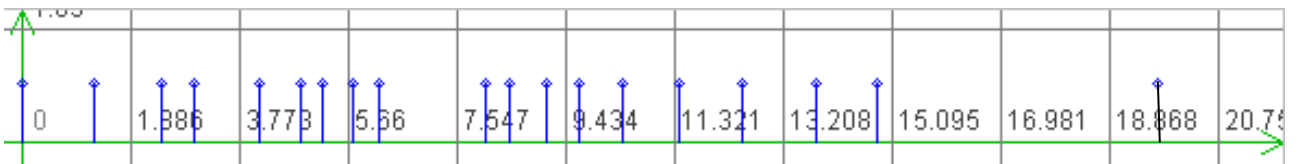
а) периодический (регулярный) поток с р-преобразованием –  $p=0,4$



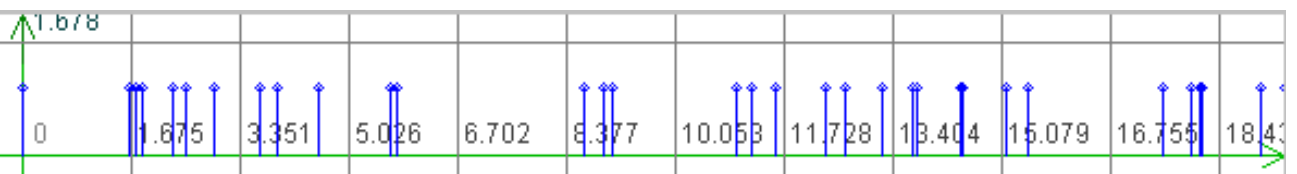
б) периодический поток с «дрожанием»



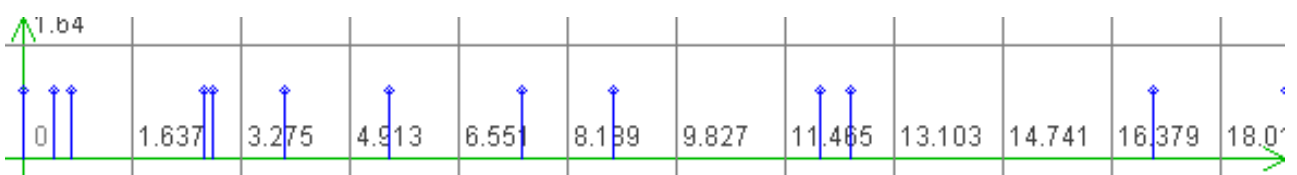
в) поток с аддитивной случайной дискретизацией -  $\lambda=2$



г) периодический поток с «дрожанием» и р-преобразованием –  $p=0,4$



д) поток с аддитивной случайной дискретизацией и р-преобразованием -  $\lambda=2, p=0,8$



е) поток с аддитивной случайной дискретизацией с «дрожанием» и р-преобразованием -  $\lambda=2, p=0,4$

Рисунок 2.12. Реализации случайных потоков событий

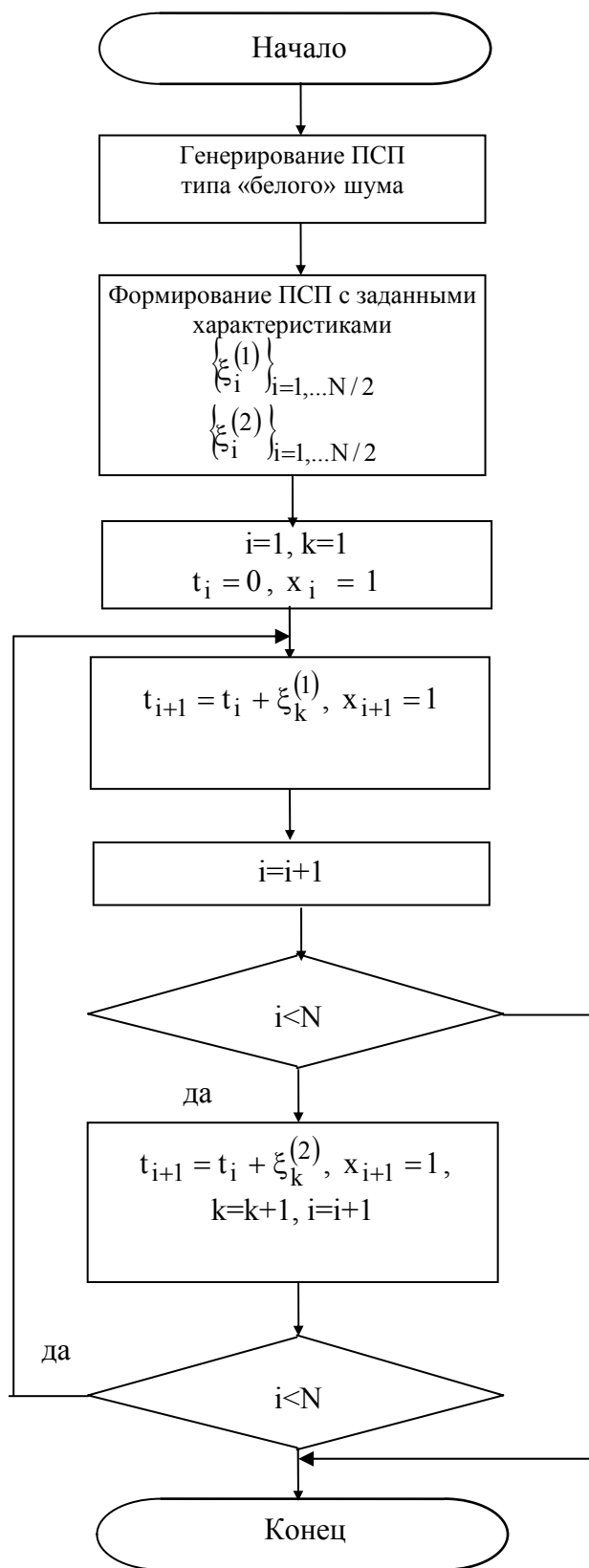


Рисунок 2.13. Блок-схема моделирования альтернирующего потока событий

Воспользовавшись базовыми моделями рекуррентных потоков событий, можно получить более сложные модели альтернирующих потоков:

- альтернирующий поток с пропусками наблюдений;
- альтернирующий поток с «дрожанием»;
- альтернирующий поток с пропусками наблюдений и «дрожанием».

Отметим, что случайные потоки применяются при генерировании неэквидистантных временных рядов (см. рис. 1.8). Все рассмотренные модели позволяют описать неэквидистантные временные ряды с непреднамеренной дискретизацией. В случае преднамеренной нерегулярной дискретизации: адаптивно-временной, спорадической, адаптивной коммутации, - характеристики модели случайного потока будут зависеть от характеристик процесса, критерия восстановления, вида модели и т.д. Эти вопросы будут рассмотрены в подразделе 3.8.

## 2.4. Проверка качества генерирования псевдослучайных последовательностей

Как правило, при решении важных задач методом имитационного моделирования исследователь проверяет качество генерирования псевдослучайной последовательности. Эта задача решается с использованием критериев согласия. Отличие применения этих критериев при оценке качества генерирования от классической задачи сглаживания статистических рядов заключается в том, что исследователь априори задаёт закон распределения и требуемые значения параметров псевдослучайной (сгенерированной) последовательности, а при решении задачи сглаживания необходимо решить задачу идентификации закона распределения.

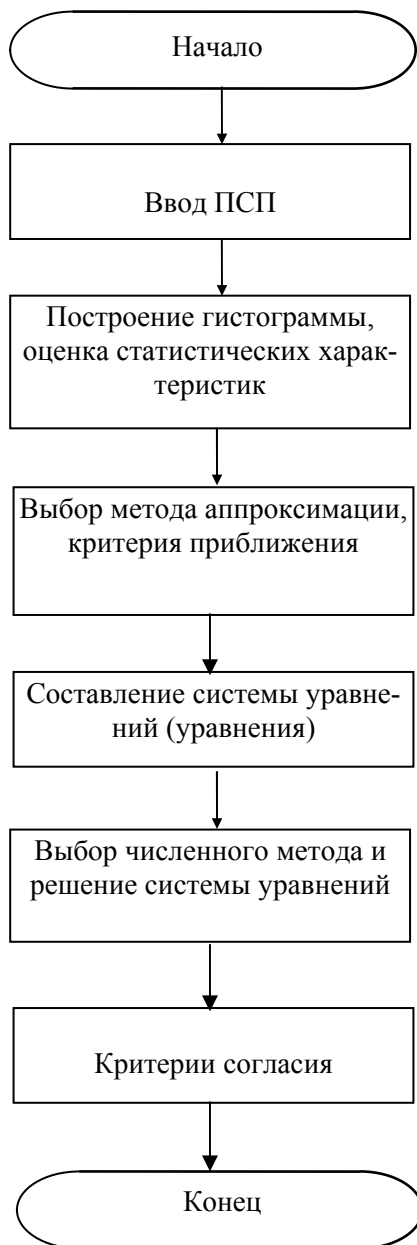


Рисунок 2.14. Блок-схема проверки качества генерирования ПСП

При оценке качества генерирования псевдослучайной последовательности в качестве теоретического закона распределения возможно использование:

1. заданного закона распределения с заданными параметрами;
2. заданного закона распределения с уточненными параметрами путём решения задачи аппроксимации закона распределения тем или иным способом.

Рассмотрим последовательность этапов решения задачи оценки качества генерирования применительно ко второму случаю, как более общему (см. рис. 2.14).

После ввода исходных данных первым шагом решения этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда  $\{x_i\}_{i=1}^N$ . Для этого необходимо выполнить следующие этапы:

1. определить диапазон изменения статистического ряда  $X_{\min}-X_{\max}$ .
2. определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{M}, \quad (2.32)$$

где  $M$  - количество дифференциальных коридоров [12].

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в  $j$ -ый дифференциальный коридор:

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent}\left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x}\right] + 1 = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.34)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что  $\delta_{i, j+1} = 1/2$ , если  $x_i = j \Delta x \wedge x_i \neq x_{\max}$ , т.е. в этом случае в  $j$  и  $j+1$  коридоры добавляется по  $1/2$ .

4. Если частота попадания в какой-либо  $k$ -ый дифференциальный коридор мала ( $p_j < 0,01 \div 0,02$ ), для уменьшения влияния случайности его объединяют с  $k+1$  коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходным материалом для построения гистограммы является сгруппированный по дифференциальным коридорам статистический ряд, представленный, как правило, в виде таблицы (см. таблицу 2.7), где  $\bar{f}_j = f_j / \Delta x_j$ .

Статистический ряд

Таблица 2.7

$f_j$	0,099	0,1006	0,1003	0,0989	0,099	0,1067	0,0954	0,1008	0,0997	0,0996
$j \Delta x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\bar{f}_j$	0,99	1,006	1,003	0,989	0,99	1,067	0,954	1,008	0,997	0,996

После построения гистограммы и оценки статистических характеристик решают задачу уточнения параметров распределения, используя тот или иной метод аппроксимации закона распределения [38].

Заключительным этапом решения задачи является проверка качества генерирования с использованием критериев согласия. Идея применения критериев согласия заключается в следующем. На основании данного статистического материала необходимо проверить гипотезу  $H$ , состоящую в том, что случайная величина  $X$  подчиняется заданному закону распределения. Введем случайную величину  $U$ , являющуюся мерой расхождения теоретического и статистического распределений. Закон распределения этой случайной величины  $f_u(u)$  зависит как от закона распределения случайной величины  $X$ , так и от числа опытов  $N$ . Если гипотеза  $H$  верна, то  $f_u(u)$  определяется законом распределения  $f_a(x)$  и числом опытов  $N$ .

Вычислим вероятность события  $P(u \leq U) = P_d$ . Если эта вероятность мала, то гипотезу следует отвергнуть как маловероятную, если значительна - экспериментальные данные не противоречат гипотезе  $H$ .

Выберем в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями случайную величину

$$U = \sum_{j=1}^M c_j (f_j - p_j)^2, \quad (2.35)$$

где  $c_j$  – веса;

$p_j = F_a(x_{j+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_m) - F_a(x_j, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  – теоретические вероятности, соответствующие  $\mathfrak{f}_j$ .

Коэффициенты  $c_j$  вводятся для учёта веса отклонений, относящихся к разным разрядам. Так отклонения могут быть малозначительными, если вероятность  $p_j$  велика, и наоборот.

К. Пирсон показал, что если положить  $c_j = N/p_j$ , то при большом  $N$   $f_u(u)$  не зависит от  $f_x(x)$  и  $N$ , а зависит только от числа разрядов  $M$ . Этот закон при увеличении  $N$  приближается к закону  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы, плотность распределения вероятностей которого определяется выражением [12]:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, & \text{если } u > 0; \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  - гамма-функция [16]. (2.37)

В этом случае мера расхождения обозначается  $\chi^2$  и определяется выражением:

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^M \frac{(\mathfrak{f}_j - p_j)^2}{p_j}. \quad (2.38)$$

Иногда для удобства вычислений, чтобы избежать вычислений с промежуточными малыми числами, выражение (2.38) представляют в виде

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (2.39)$$

где  $n_j$  - число попаданий  $x$  в  $j$ -ый дифференциальный коридор.

Распределение  $\chi^2$  зависит от параметра  $r$ , называемого числом «степеней свободы». Число степеней свободы равно  $r = M - k$ , где  $k$  – число независимых наложенных условий (связей), например, условие нормировки, совпадение теоретических и статистических моментов и т.д.

Для распределения  $\chi^2$  составлены специальные таблицы (см. приложение П.6) [12]. Пользуясь ими, можно для каждого значения  $\chi^2$  и числа степеней свободы  $r$  найти вероятность того, что величина, распределенная по закону  $\chi^2$ , превзойдет это значение. Если эта вероятность мала, то результат опыта следует признать противоречащим гипотезе о том, что случайная величина распределена по предполагаемому закону. Если на практике она оказывается меньше, чем 0,1, рекомендуется проверить результаты эксперимента и, если это возможно, повторить его.

**Схема применения критерия сводится к следующему:**

1. строится гистограмма входной последовательности
2. определяется мера расхождения  $\chi^2$  по формуле (2.37) или (2.38);

3. определяется число степеней свободы  $r=M-k$ ;
4. по  $r$  и  $\chi^2$  по таблице приложения П.6 определяется вероятность того, что величина, имеющая распределение  $\chi^2$  с  $r$  степенями свободы, превзойдет данное значение  $\chi^2$ ;

5. если вероятность  $P_d$  велика, то гипотеза  $H$  принимается.

Следует отметить, что с помощью критериев согласия можно только в некоторых случаях опровергнуть гипотезу  $H$ . Если вероятность  $P_d$  велика, то это указывает лишь на то, что гипотеза  $H$  не противоречит опытным данным [12].

Кроме критерия Пирсона на практике применяется критерий А.Н. Колмогорова [12].

В качестве меры расхождения между статистическим и теоретическим распределениями рассматривается величина, равная

$$\delta = \max |F(x) - F_a(x, \alpha_1, \dots, \alpha_m)|. \quad (2.40)$$

Обоснованием выбора этой меры расхождения являются следующие обстоятельства:

- простота определения  $\delta$ ;

• при неограниченном числе испытаний  $N$  вероятность неравенства  $\delta \sqrt{N} \geq \lambda$  стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 \lambda^2}. \quad (2.41)$$

Значения  $P(\lambda)$ , подсчитанные по формуле (2.41), приведены в приложении П.7.

**Схема применения этого критерия сводится к следующему:**

1. строятся статистическая и теоретическая функции распределения;
2. по графикам определяется  $\delta$ ;
3. вычисляется  $\lambda = \delta \sqrt{N}$ ;
4. по таблице приложения П.7 определяется  $P(\lambda)$ ;
5. гипотеза принимается, если для заданного уровня значимости  $P_d$ ;
6.  $\lambda < \lambda_{1-P_d}$ ;

7. Если вероятность  $P_d$  мала, гипотезу  $H$  следует отвергнуть. При сравнительно больших  $P(\lambda)$  её можно считать совместимой с опытными данными.

Следует отметить, что критерий Колмогорова можно применять, когда известно теоретическое распределение и численные значения его параметров, например, при проверке качества сгенерированной псевдослучайной последовательности с заданным законом распределения [38], расчете параметров функций распределения [62]. Если применять этот критерий в случаях, когда параметры теоретического распределения определяются по статистическим данным, критерий даёт завышенное значение  $P(\lambda)$ . В этом случае мы рискуем принять неправильную гипотезу.

Если уточнение параметров распределения сгенерированной последовательности не производится, т.е. не решается задача аппроксимации законов распределения, качество генерирования ПСП производится с использованием в качестве теоретического распределения заданного закона с заданными параметрами.



## 2.5. АИС для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданными законами распределения

Методы, рассмотренные в разделе 2.2-2.3, легли в основу АИС, предназначенной для генерирования псевдослучайных последовательностей с заданными законами распределения и проверки качества генерирования.

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [27, 38, 49].

Технические требования, предъявляемые к системе состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

### 2.5.1. Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 2.15. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных:

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

**Блок получения статистических данных** делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из  $N$  отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

**Блок оценки статистических характеристик** состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.

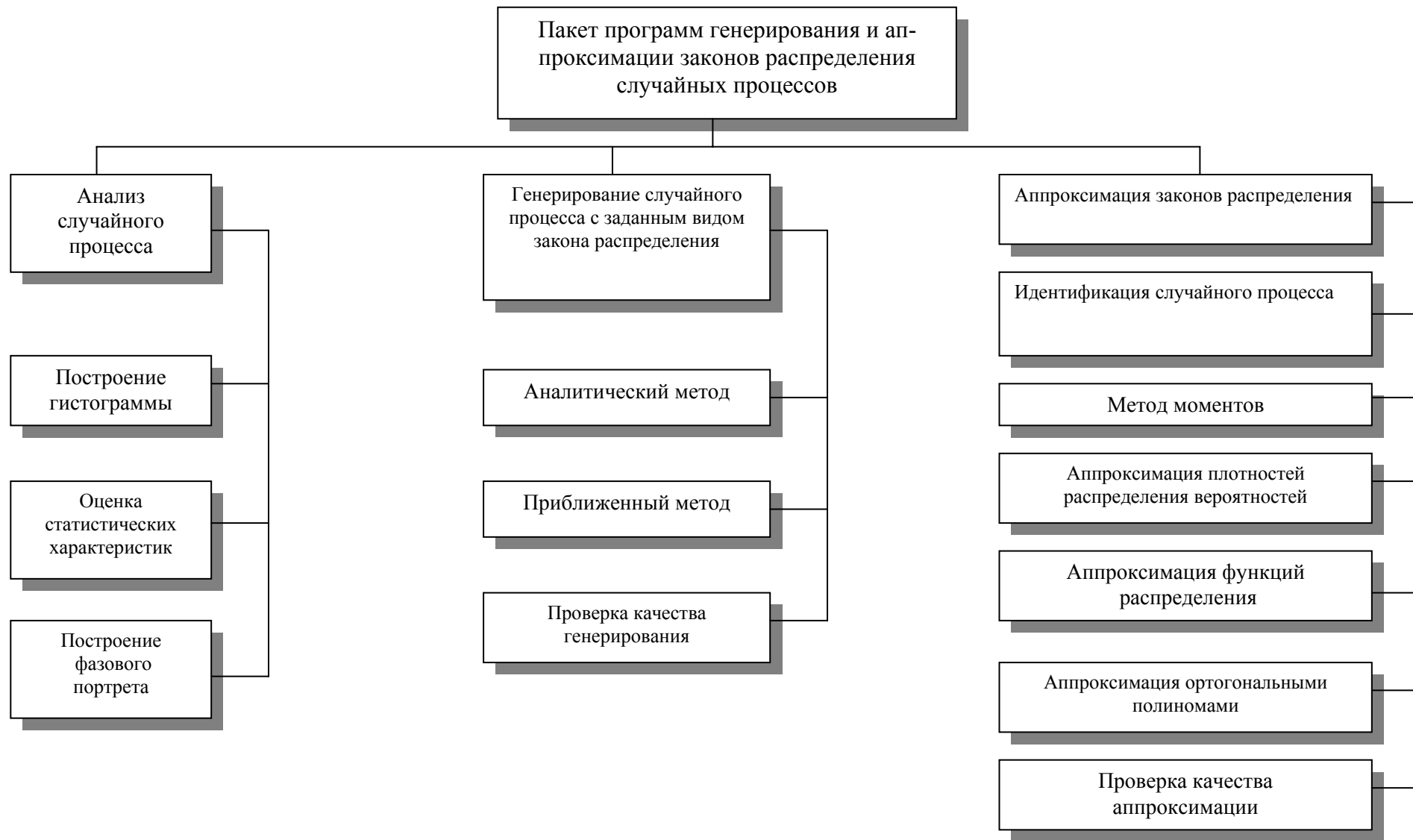


Рисунок 2.15. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов