

$$F_x(x_j, a, b) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x_j < a) \\ \frac{2(x_j - a)^2}{(b - a)^2}, & \left(a < x_j < \frac{a + b}{2}\right) \\ 1 - \frac{2(b - x_j)^2}{(b - a)^2}, & \left(\frac{a + b}{2} < x_j < b\right) \\ 1, & (b < x_j < \infty) \end{cases}.$$

Найдем все необходимые для расчетов частные первые, вторые и смешанные производные функции  $F_x(x)$ .

а)  $(a < x < (a+b)/2)$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(x_j - a)}{(b - a)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4} - \frac{16(x_j - a)}{(b - a)^3} + \frac{4}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = \frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}.$$

б)  $((a+b)/2 < x < b)$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(b - x_j)}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = -\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{16(b - x_j)}{(b - a)^3} - \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{4}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}.$$

Полученные выражения необходимо подставить в выражения (1.49)-(1.52) и рассчитать частные производные дифференциальных функций  $F_1$  и  $F_2$ , которые используются в вычислениях неизвестных параметров путем последовательного приближения итерационных формул (1.34) и (1.35).

Аналогично рассчитываются параметры аналитических моделей и для других типовых законов распределения (см. приложения 8-9).

Ниже приведены результаты определения параметров функции распределения Симпсона.

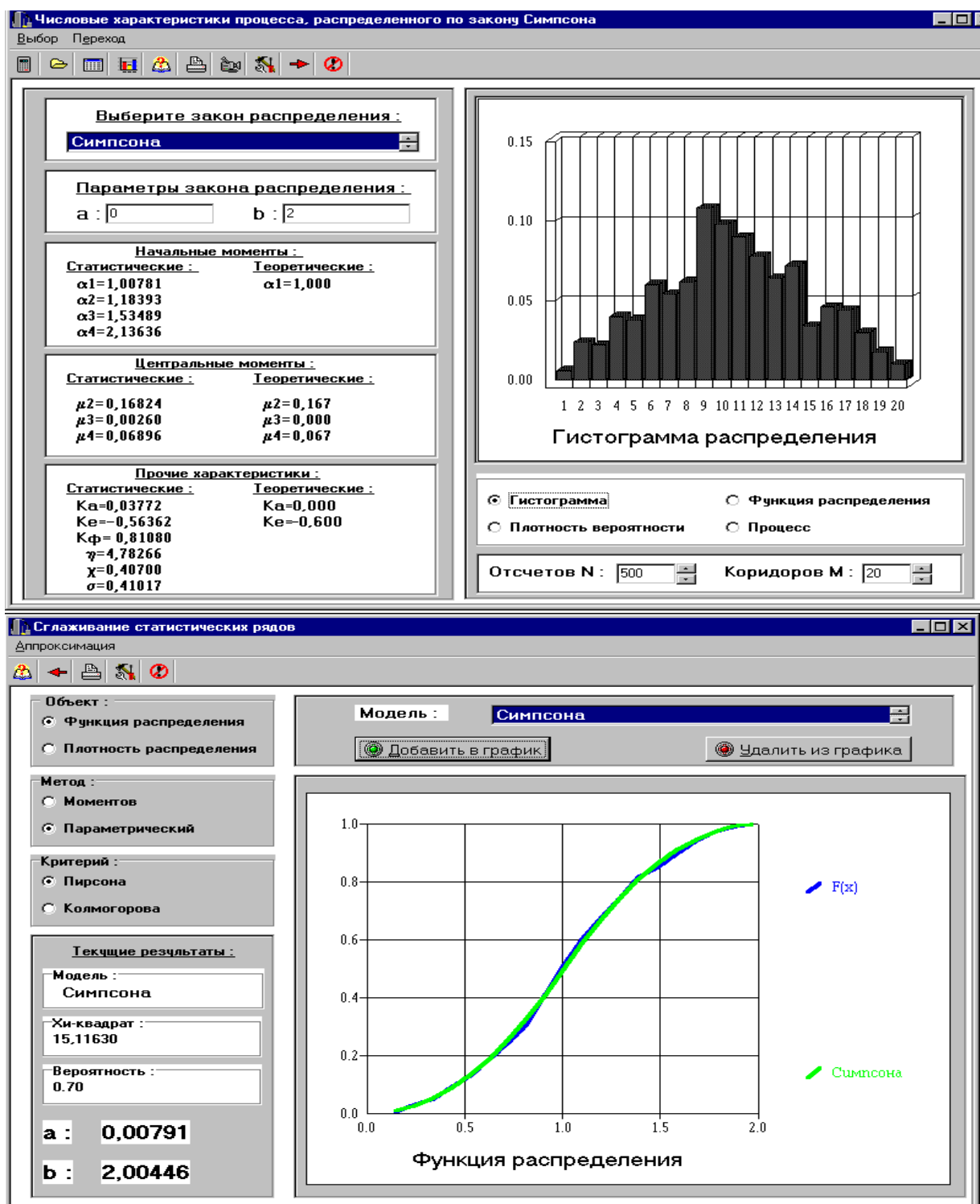


Рисунок 1.14. Результаты аппроксимации

Сравнительный анализ методов аппроксимации законов распределения отдает предпочтение методу аппроксимации функций распределения, особенно при малой выборке.

## 1.7. АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

Методы, рассмотренные в разделах 1.4-1.6, легли в основу АИС, предназначенной для определения аналитического выражения закона распределения исследуемого случайного процесса.

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [72, 103]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей.

Технические требования, предъявляемые к системе состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

### 1.7.1. Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 1.15. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. 1.16):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

**Блок получения статистических данных** делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из  $N$  отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

**Блок оценки статистических характеристик** состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.



Рисунок 1.15. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

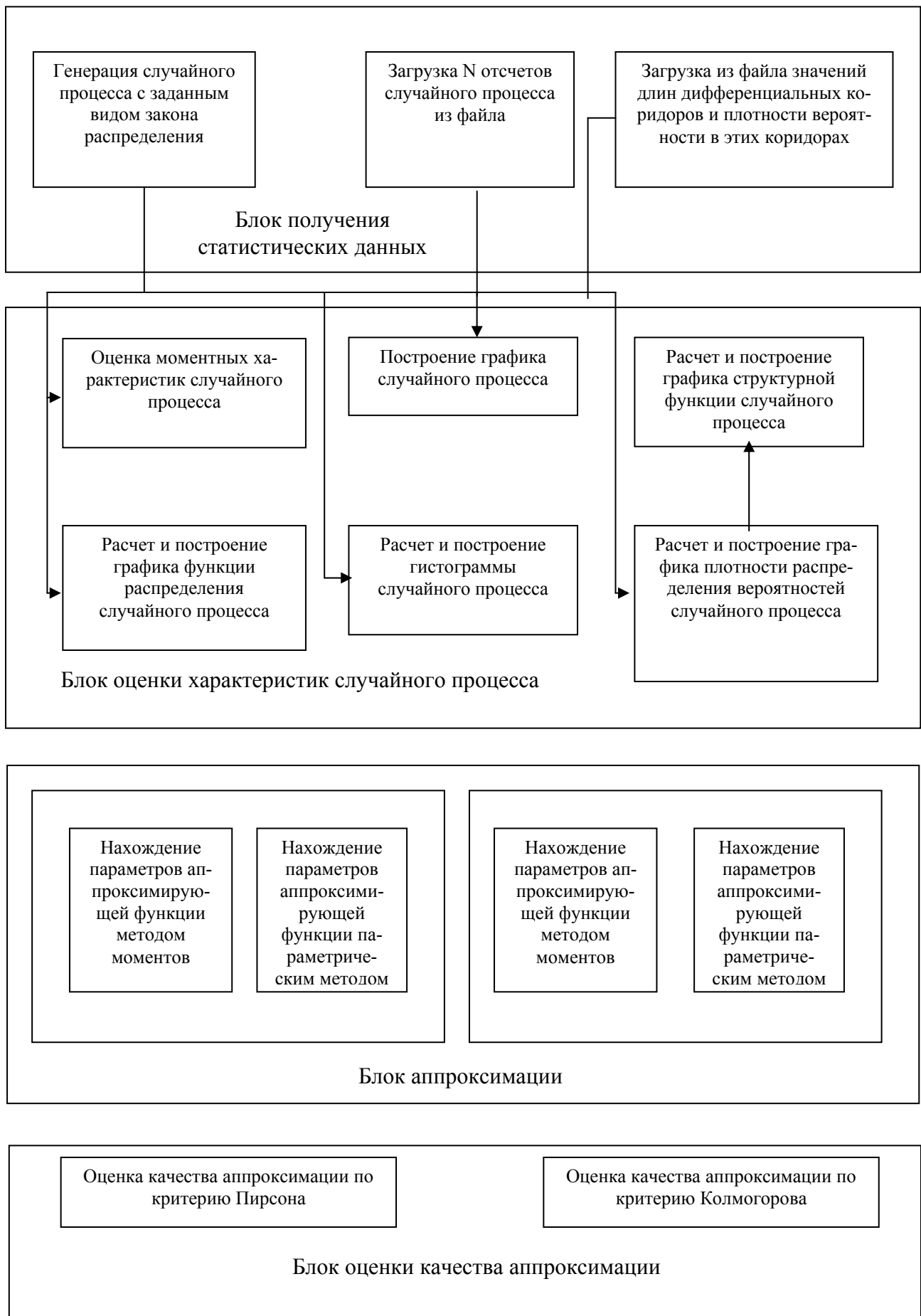


Рисунок 1.16. Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

**Блок аппроксимации** состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

**Блок оценки качества аппроксимации** состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Например, можно изменить способы задания статистических данных, с которыми работает система, добавить новые законы распределения, по которым будет генерироваться случайный процесс, задать другие статистические характеристики случайного процесса, которые оцениваются в программе, изменить методы их расчетов, добавлять новые или изменять старые методы аппроксимации и т.д. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

## 1.7.2. Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. 1.17, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

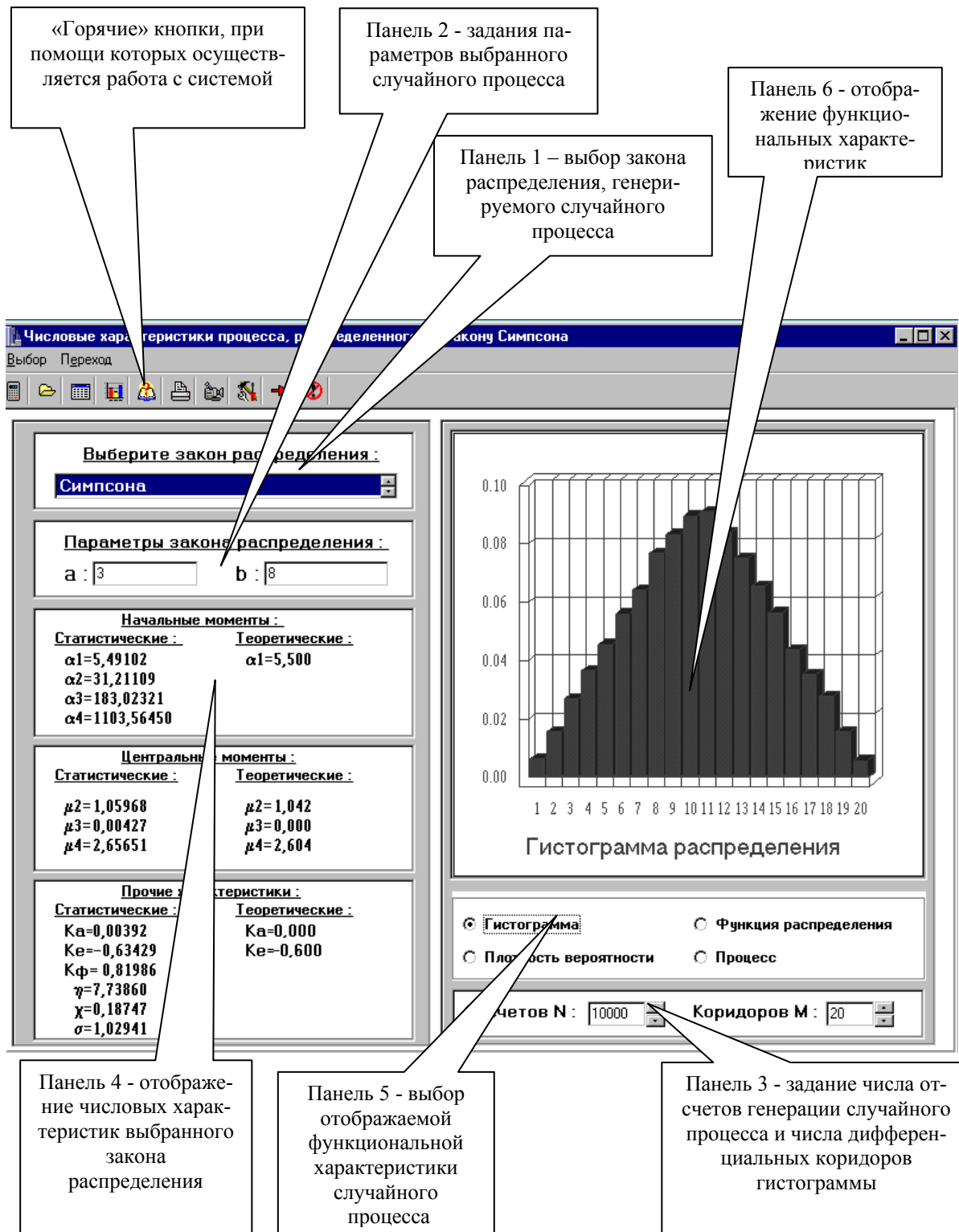


Рисунок 1.17. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. 1.18 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. 3.3;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывается экранная форма, отображающая структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. 1.22;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. 1.19 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.



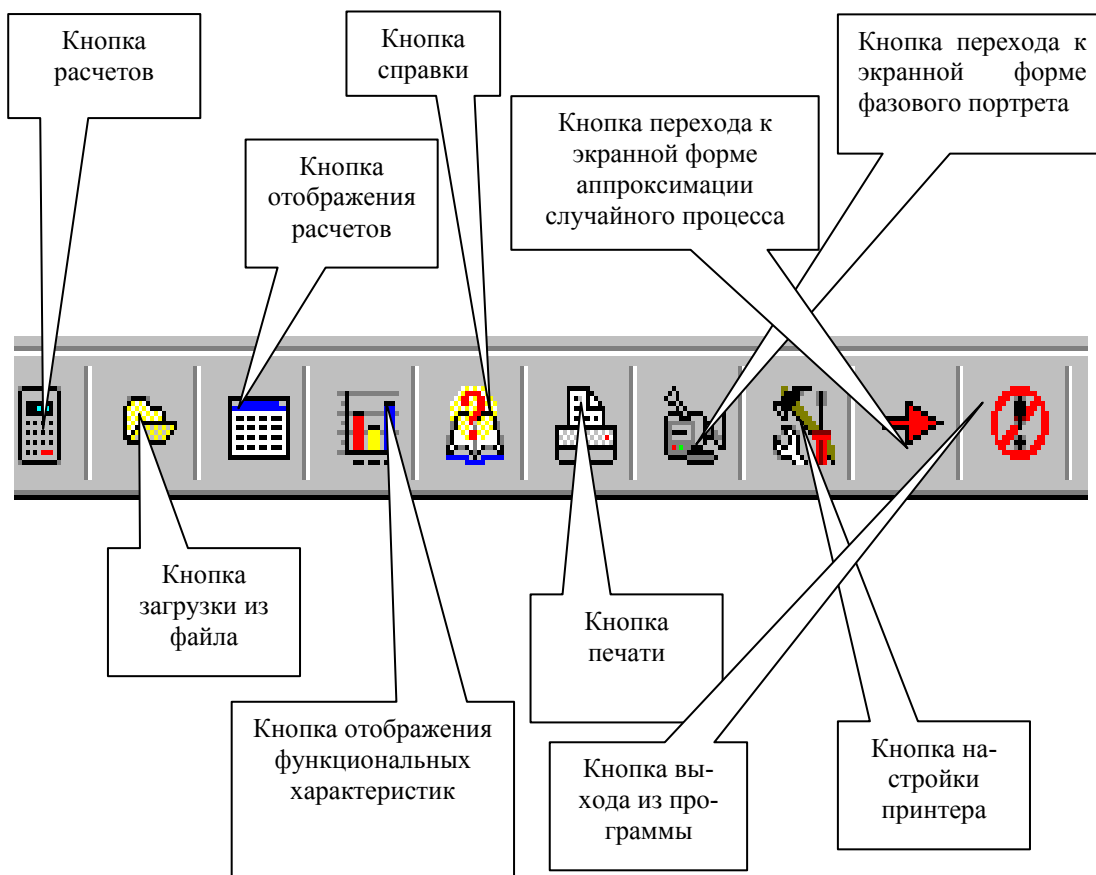


Рисунок 1.18. Панель «горячих» кнопок

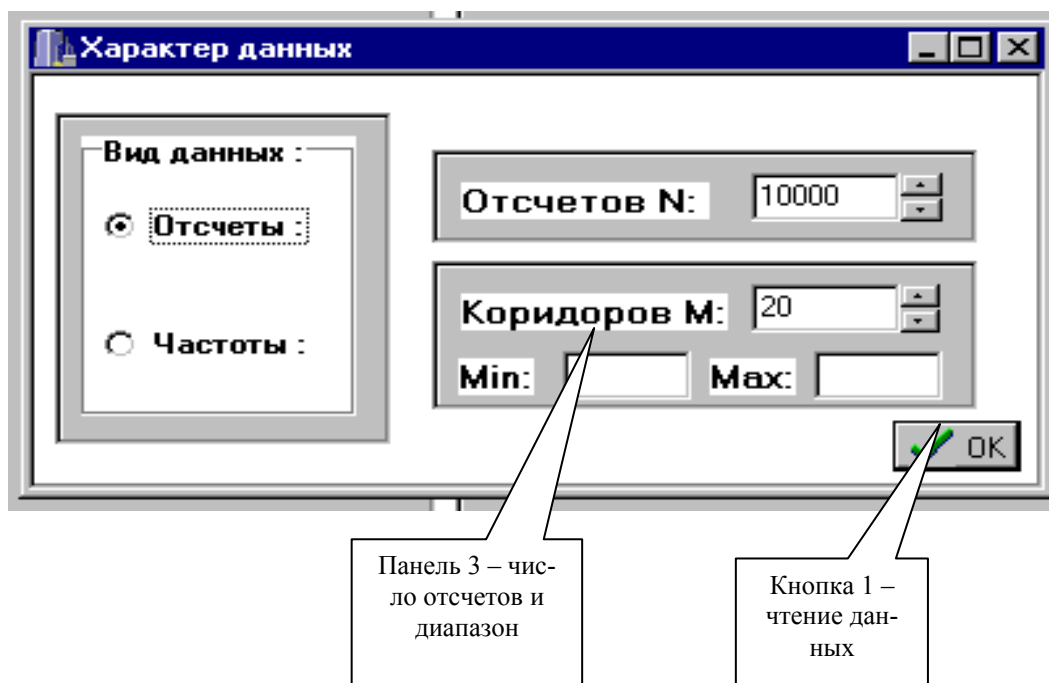


Рисунок 1.19. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. 1.21 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присут-

ствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. 1.20) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

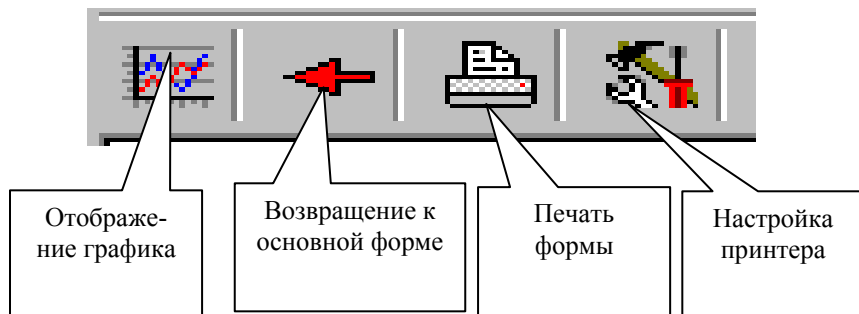


Рисунок 1.20. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

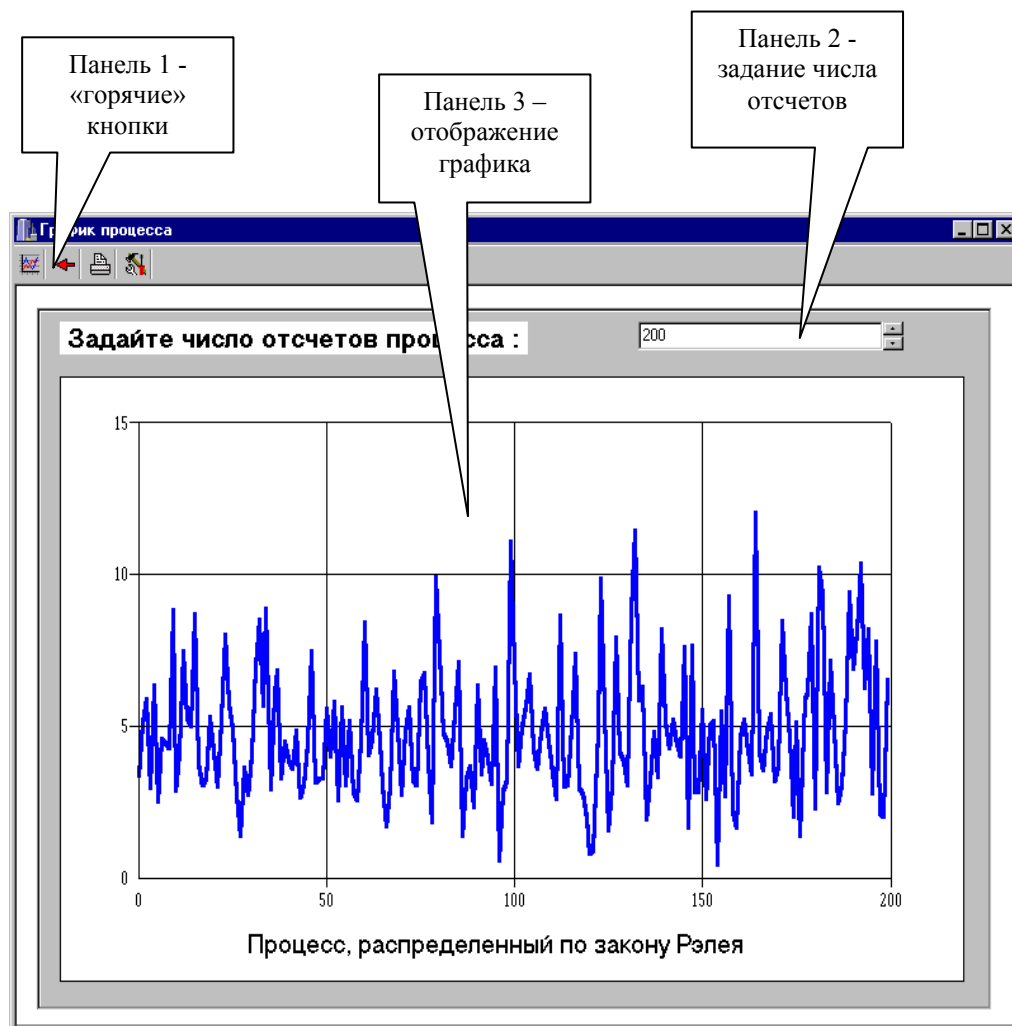


Рисунок 1.21. Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. 1.22 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

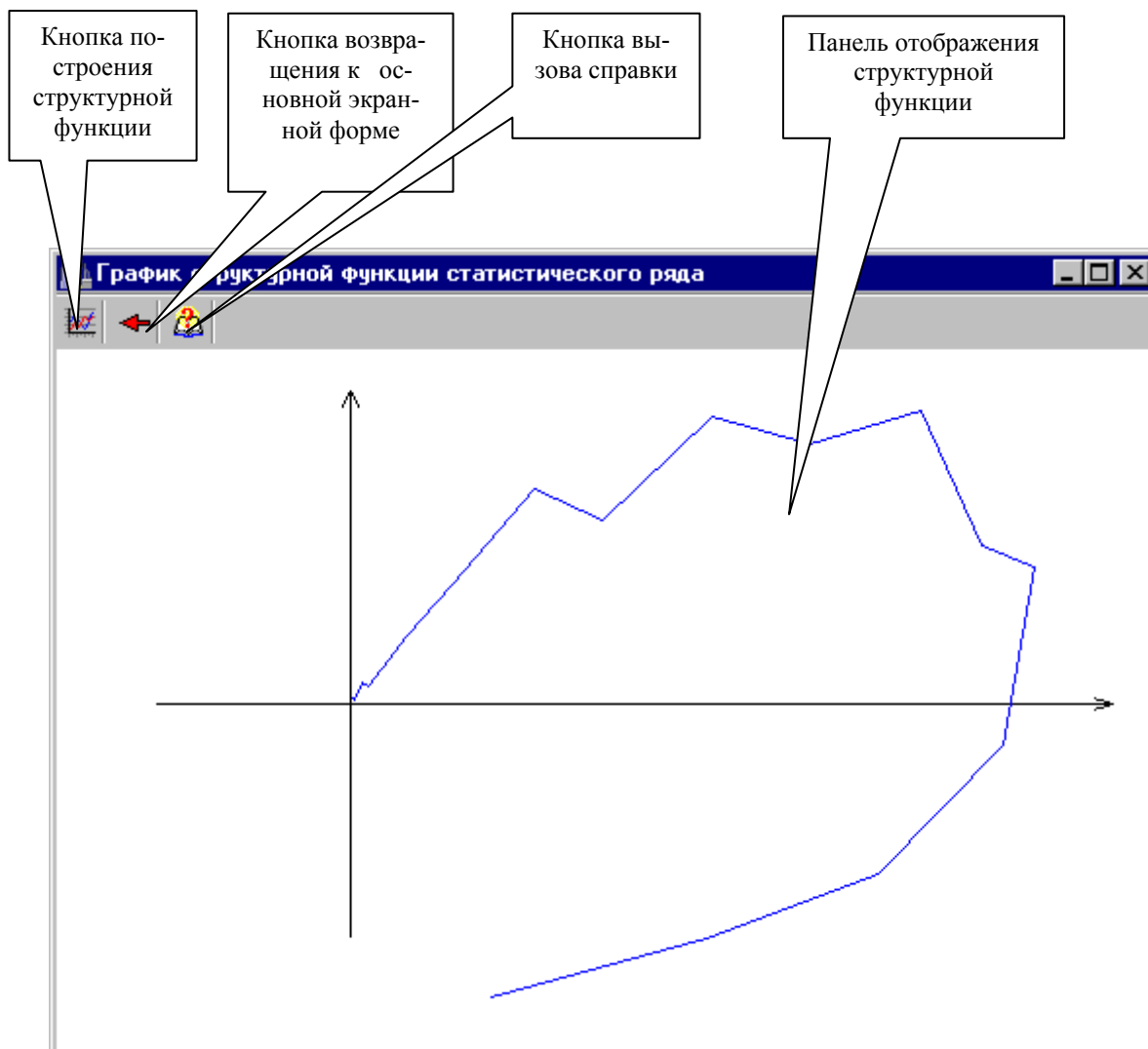


Рисунок 1.22. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. 1.23, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. 1.24-1.26 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

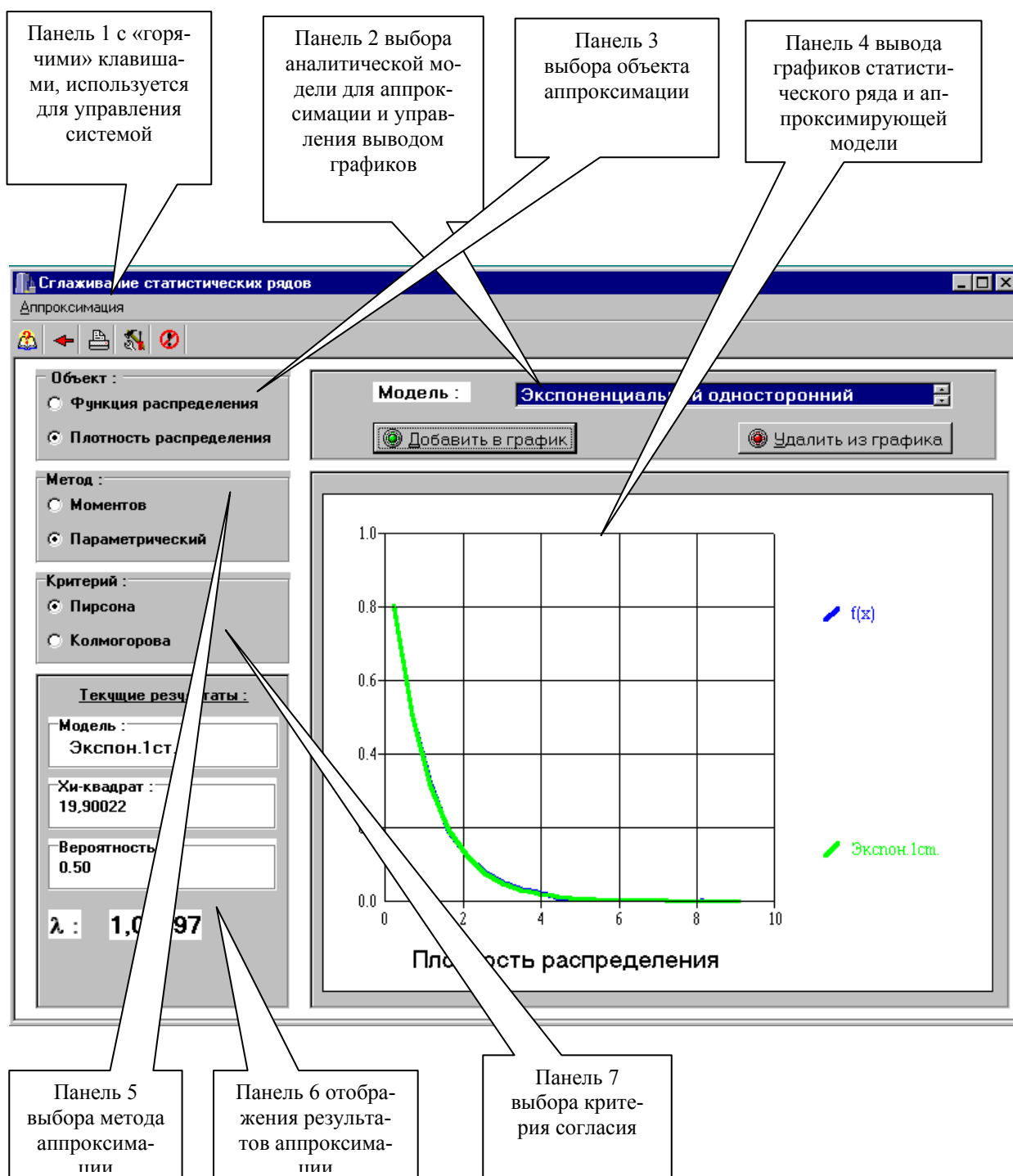


Рисунок 1.23. Общий вид формы блока аппроксимации

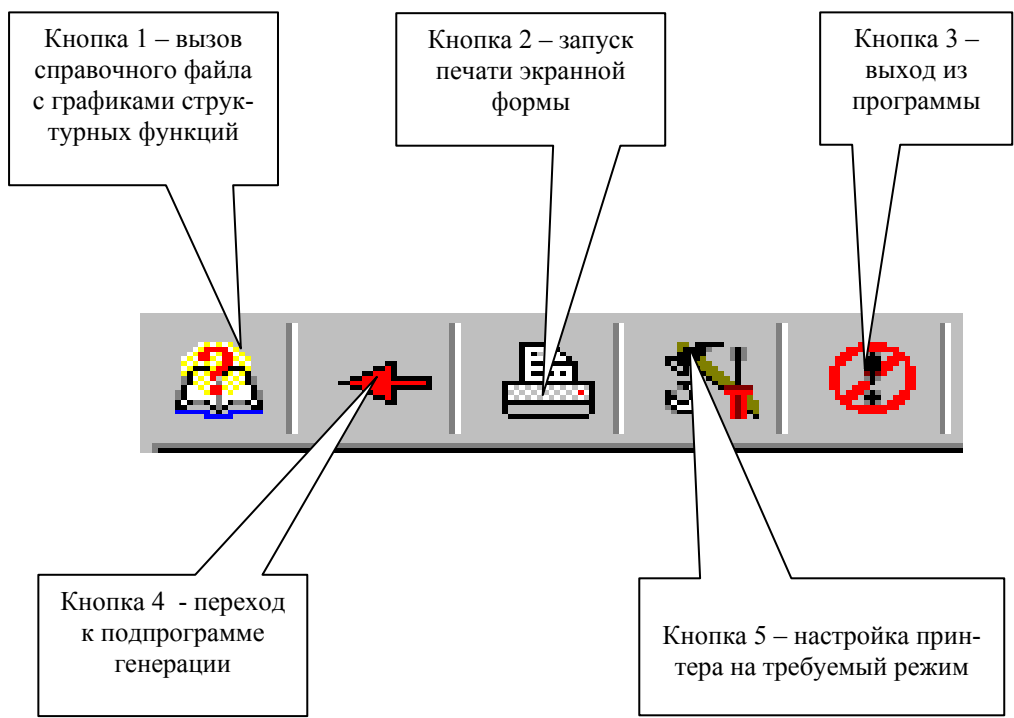


Рисунок 1.24. Панель инструментов

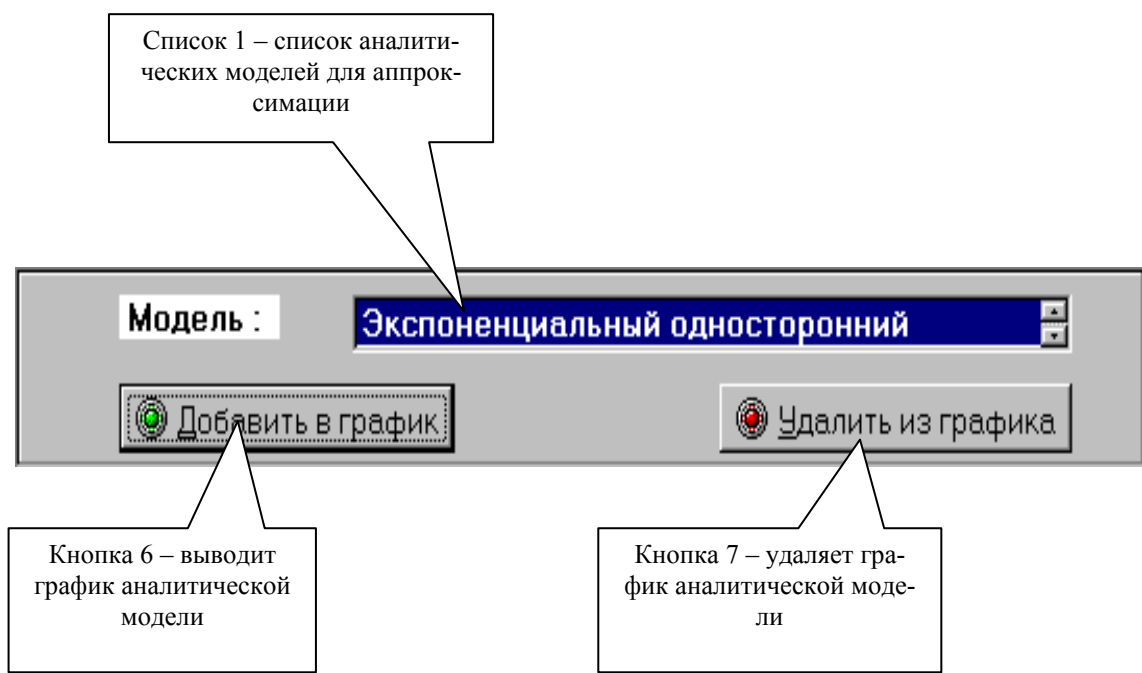


Рисунок 1.25. Панель выбора аналитической модели

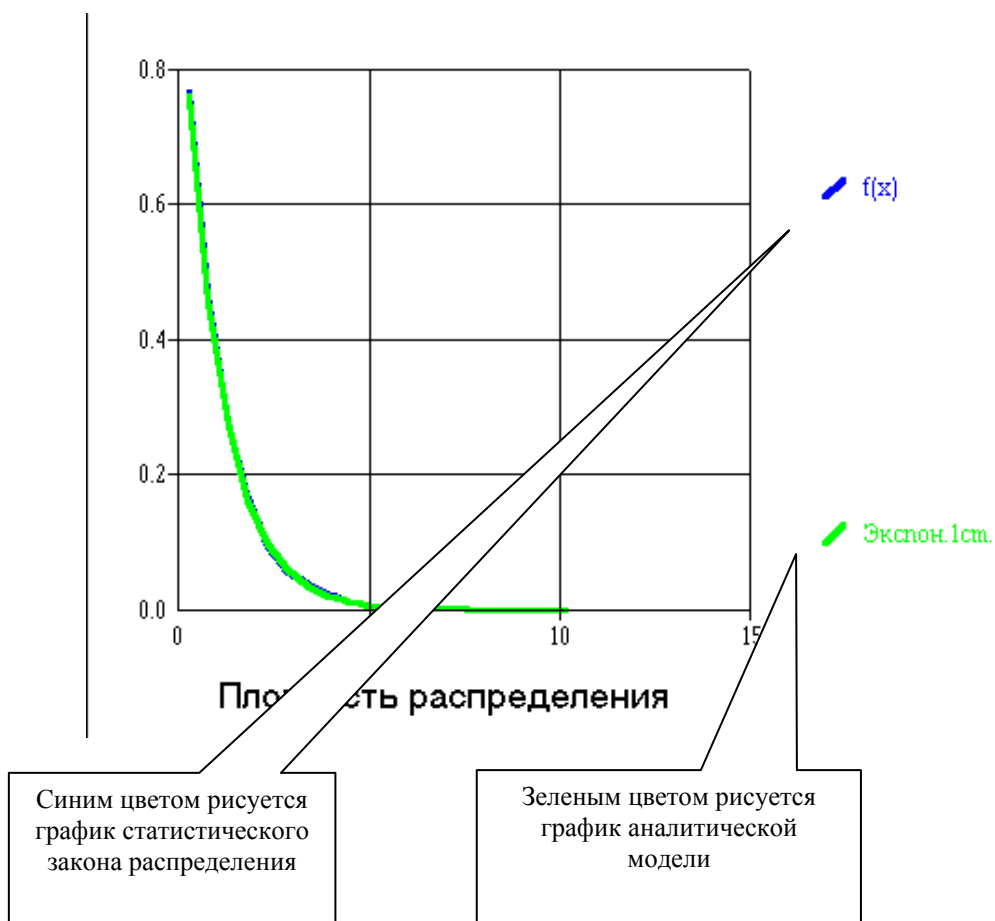
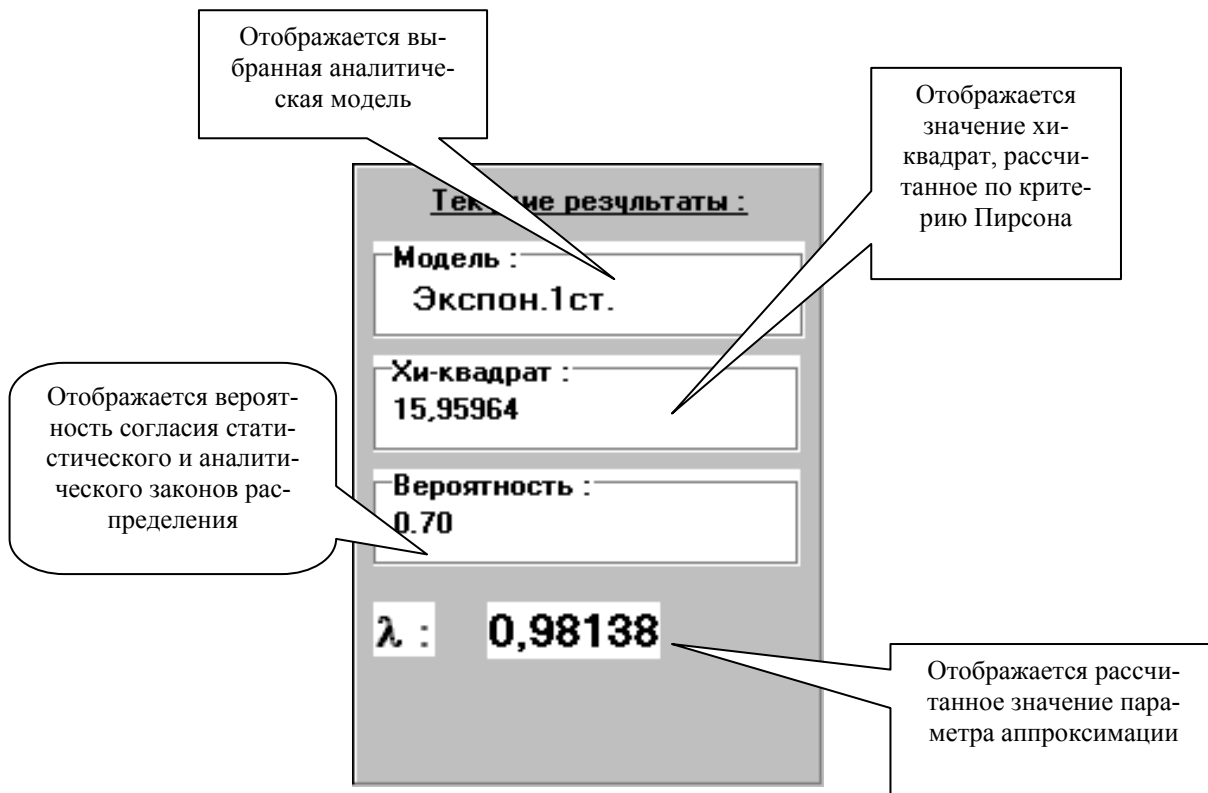


Рисунок 1.26. Панели вывода результатов

### 1.7.3. Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. 1.17). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет  $N$  отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. 1.22).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. 1.23).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение  $\chi^2$  (критерий Пирсона) или  $\lambda$  (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера, на рис. 1.27 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

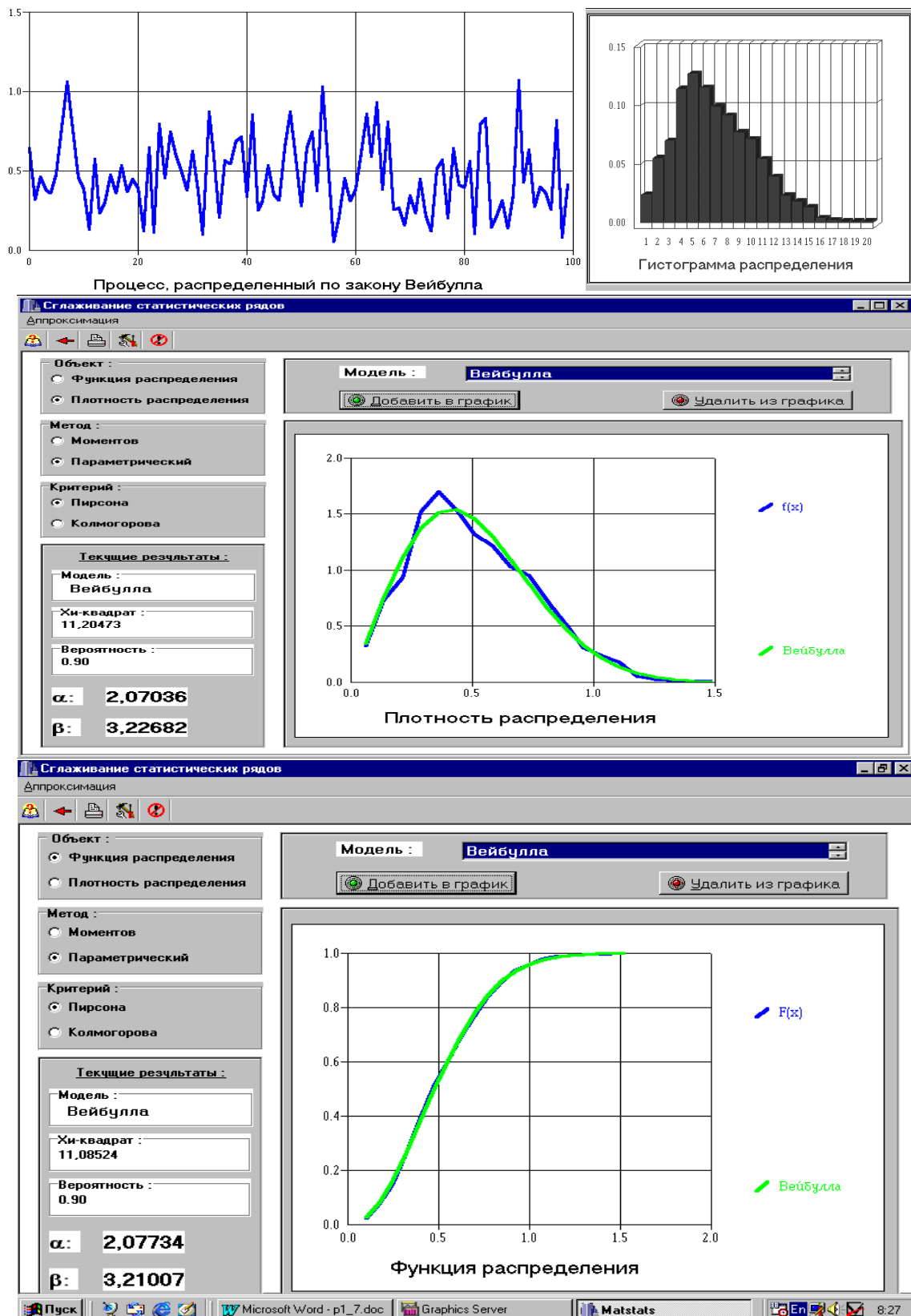


Рисунок 1.27. Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла



## 2. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ ЗАДАННОГО ВИДА

### 2.1. Основные понятия и определения

Важной частью статистического анализа является корреляционный анализ. Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем [92], выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса [86], оценивать погрешности средств измерений [104], определять скорость проката, строить корреляционные приёмники и т.д.[70]. Для экспериментального определения корреляционных функций применяются как специализированные вычислительные средства - коррелометры, так и универсальные вычислительные машины.

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента  $t, t'$ , рассматриваемый как функция  $t, t'$  [45]:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t')], \quad (2.1)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , а  $m_x(t)$  - математическое ожидание случайного процесса в сечении  $t$ .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_x(t')}}. \quad (2.2)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией  $\tau = t - t'$  [44]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (2.3)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале  $[0, \infty)$ .

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (2.2), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (2.5)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 2.1, а их классификация – на рис. 2.1.

Следует отметить, что 8-ая модель может быть корреляционной функцией только в том случае, если  $|C| \leq \alpha/\omega_0$ . В противном случае спектральная плотность  $S_x(\omega) < 0$  (см. таблицу 6.8).

Из анализа моделей видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные и колебательные. В приложении П.12 приведены графики экс

## Типовые модели корреляционных функций

Таблица 2.1.

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$
8	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+C\text{Sin}\omega_0\tau)$

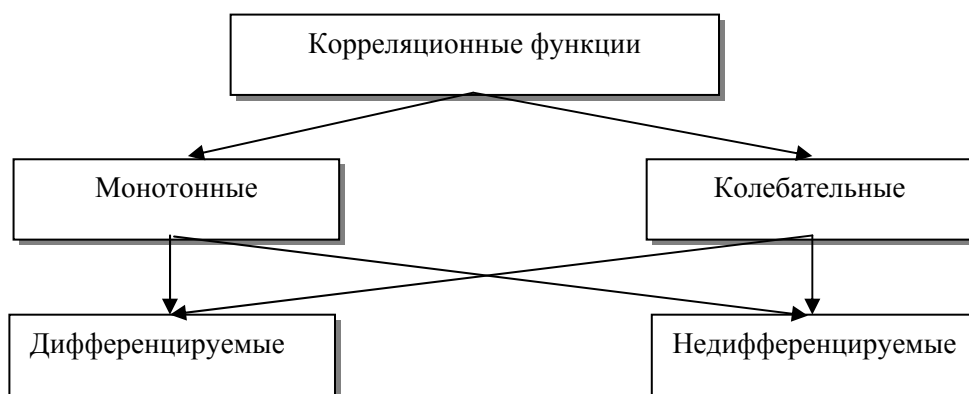


Рисунок 2.1. Классификация корреляционных функций

по экспоненциальной (модель 1) и экспоненциально-косинусной (модель 5) корреляционных функций.

Из графиков видно, что в «нуле» производная корреляционных функций имеет разрыв первого рода. То есть случайный процесс относится к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6, 8 таблицы 2.1).

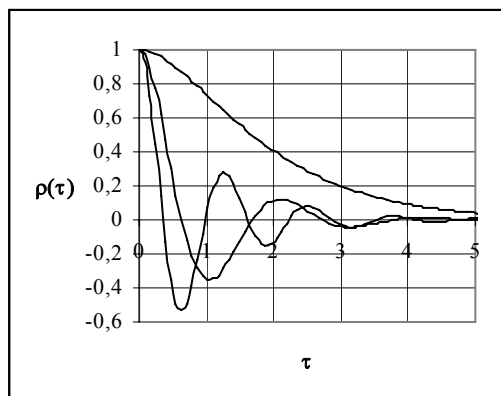


Рисунок 2.2.

Пример корреляционной функции дифференцируемого случайного процесса (модель 6), при различных сочетаниях параметров:  $\omega_0 / \alpha = 0, 3, 5$ , - представлен на рис. 2.2.

Отметим, что корреляционная функция  $n$ -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами.

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [87].

В практических приложениях часто для описания временной зависимости нормальных стационарных процессов применяют [80]:

- релейную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = k_\phi \sigma_x \rho_x(\tau); \quad (2.7)$$

- полярную (знаковую) корреляционную функцию

$$P_x(\tau) = M \left[ \text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_x(\tau). \quad (2.8)$$

По найденной релейной корреляционной функции можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \right]}. \quad (2.9)$$

Отметим, что  $R_x(0) = M[\overset{\circ}{x}(t)] = k_\phi \sigma_x$ . Отсюда видно, что для оценки релейной корреляционной функции процессов, отличных от нормального, необходима априорная информация о законе распределения, т.е. необходимо знание  $k_\phi$ .

Зная полярную корреляционную функцию, из выражения (2.7) можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} P_x(\tau). \quad (2.10)$$

Из выражения (2.8) следует, что при оценке полярной корреляционной функции теряется информация о мощности процесса.

Несмотря на ограничения на закон распределения, релейные и полярные корреляционные функции находят широкое применение при решении различных практических задач. Это объясняется простотой технической реализации алгоритмов.

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяют параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой инфор-

мации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

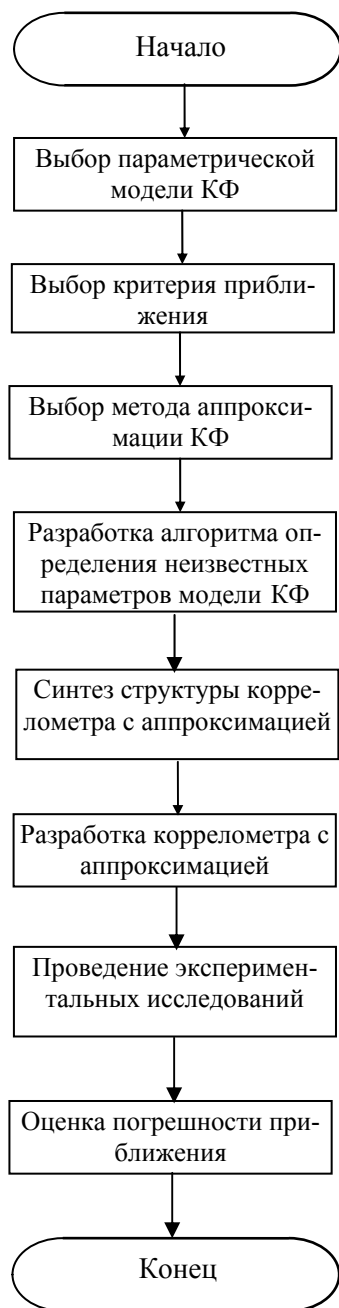


Рисунок 2.3. Блок-схема аппроксимации

В общем виде задача аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями включает этапы, представленные на рис. 2.3.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [87, 96];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [6, 87, 96, 111].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего не известно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желательнее с меньшим числом параметров.

От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя.

Многочисленные исследования [42, 79, 80, 82, 87, 91, 92, 96] показали, что при анализе случайных процессов часто встречаются затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные корреляционные функции (см. рис. 2.4).

Например, экспоненциальная модель корреляционной функции оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки интервала корреляции и т.д. Подобные задачи возникают при создании инфор

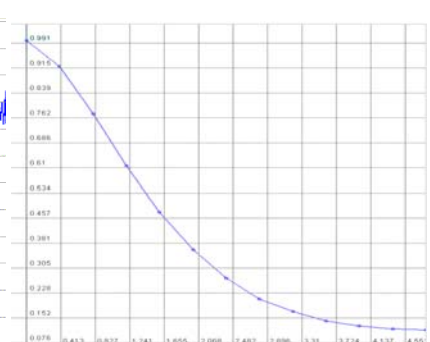
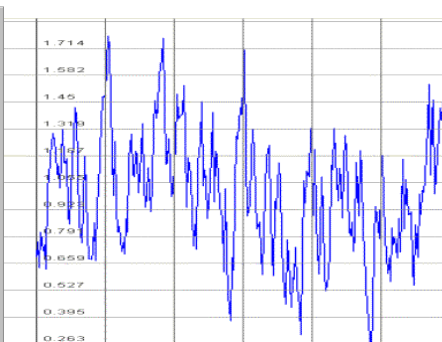
**Моделирование СП с КФ вида:**  
 $K_X(t) = \exp(-a * |t|)$

Число отсчётов СП:  Шаг дискретизации:  Параметр a:

Число отсчётов КФ:

Рассчитать Кор. функцию  Рассчитать Случайный процесс

СКП моделирования



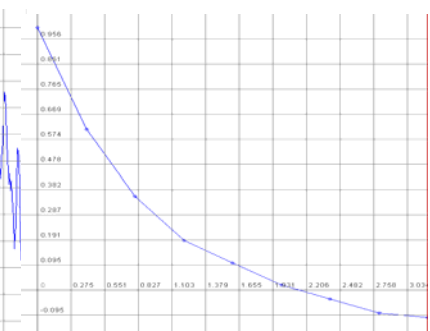
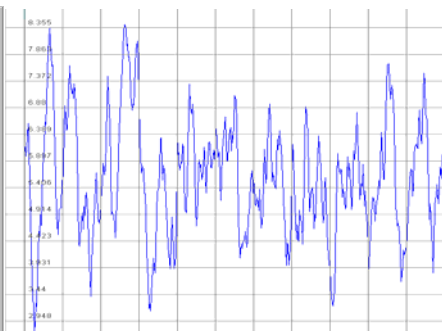
**Моделирование СП с КФ вида:**  
 $K_X(t) = \exp(-a * |t|) * (1 + a * |t|)$

Число отсчётов СП:  Шаг дискретизации:  Параметр a:

Число отсчётов КФ:

Рассчитать Кор. функцию  Рассчитать Случайный процесс

СКП моделирования



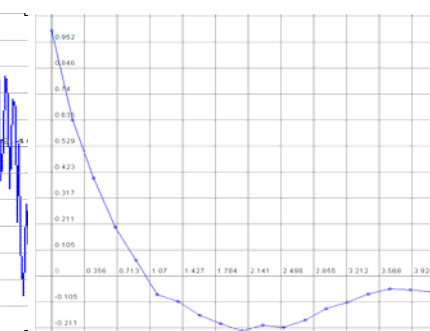
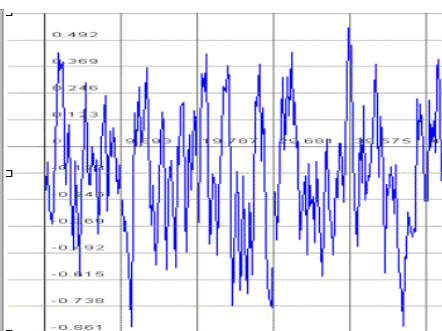
**Моделирование СП с КФ вида:**  
 $K_X(t) = \exp(-a * |t|) * (1 - a * |t|)$

Число отсчётов СП:  Шаг дискретизации:  Параметр a:

Число отсчётов КФ:

Рассчитать Кор. функцию  Рассчитать Случайный процесс

СКП моделирования



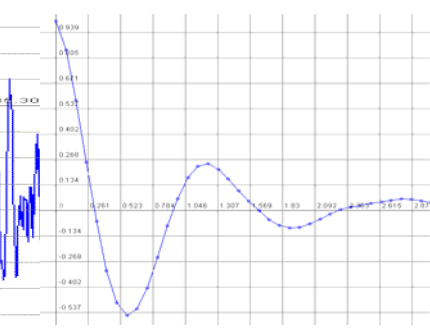
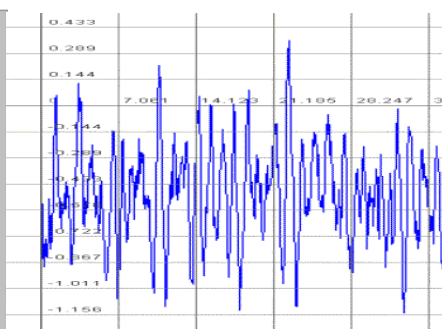
**Моделирование СП с КФ вида:**  
 $K_X(t) = \exp(-a * |t|) * \text{Cos}(w_0 * t)$

Число отсчётов СП:  Шаг дискретизации:  Параметр a:

Параметр W0:  Число отсчётов КФ:

Рассчитать Кор. функцию  Рассчитать Случайный процесс

СКП моделирования



**Моделирование СП с КФ вида:**  
 $K_X(t) = \exp(-a * |t|) * (\text{Cos}(w_0 * t) + a/w_0 * \text{Sin}(w_0 * t))$

Число отсчётов СП:  Шаг дискретизации:  Параметр a:

Параметр W0:  Число отсчётов КФ:

Рассчитать Кор. функцию  Рассчитать Случайный процесс

СКП моделирования

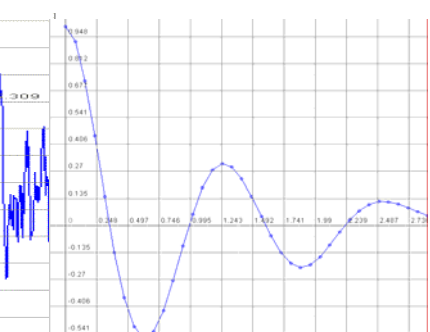
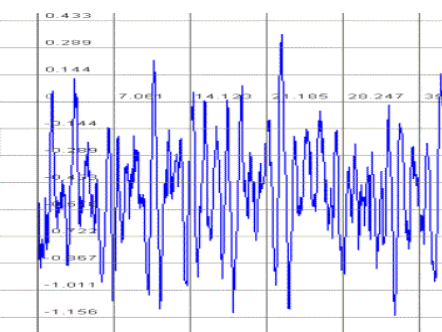


Рисунок 2.4. Случайные сигналы и их корреляционные функции

мационно-измерительных систем, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени, постоянные времени сглаживающих устройств при получении оценок сигнала. Часто данная модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик реальных объектов, так как существует большой класс динамических систем, для которых процессы с экспоненциальной корреляционной функцией являются наилучшими с точки зрения помехозащищенности. Кроме того, при теоретических исследованиях часто делается допущение о том, что анализируемый процесс является марковским. В [79] доказывается теорема, согласно которой стационарный гауссов случайный процесс является марковским тогда и только тогда, когда его нормированная корреляционная функция имеет вид  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ .

При прохождении сигналов через узкополосные системы, их нормированные корреляционные функции имеют вид:  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$  [79].

Знание параметров таких функций позволяет определить интервал корреляции процесса, резонансную частоту системы и т.д.

Всё это свидетельствует о фундаментальной роли экспоненциальных и экспоненциально-косинусных корреляционных функций и приводит к необходимости выбирать в качестве моделей функции именно этого вида.

Обычно в качестве критерия приближения применяют точностные критерии [56]:

- минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min; \quad (2.11)$$

- минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 e^{-\frac{\tau}{\tau_k}} d\tau = \min, \quad (2.12)$$

где  $\tau_k$  - максимальный интервал корреляции [96];

- критерий равномерного приближения:

$$|K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)| < \varepsilon, \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon$  - некоторая сколь угодно малая величина.

Реже применяются неточностные критерии. Так, например, в [56] выбран критерий соответствия вида модели виду корреляционной функции исследуемого процесса. В общем случае этот критерий не обеспечивает ни минимума квадратической, ни минимума экспоненциально-взвешенной погрешности аппроксимации. Так как корреляционная функция определяется в результате эксперимента, имеют место случайные погрешности. Поэтому, для получения модели нецелесообразно прибегать к интерполированию. Кроме того, во многих случаях нет необходимости требовать близости модели к корреляционной функции исследуемого процесса в равномерном смысле, а достаточно лишь интегральной близости функций.

Практика показывает [54, 56, 87, 94, 95, 111], что в этом случае наиболее целесообразно применять квадратическое приближение.

Обсудив основные требования, предъявляемые к моделям корреляционных функций, критериям оптимальности, перейдем к методам аппроксимации корреляционных функций.

Классификация методов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями представлена на рис. 2.5.

Наиболее общими свойствами обладает аппроксимация корреляционных функций с использованием ряда по ортогональным функциям или полиномам Лагерра, Лежандра, Чебышева, Эрмита и т.д. Однако, при анализе узкополосных процессов, когда корреляционная функция имеет слабозатухающий колебательный характер (см. приложение П.12), аппроксимация ортогональным рядом потребует большого числа членов разложения, что неудобно как при использовании аналитического выражения, так и при построении аппаратуры. Другим недостатком метода и известных ортогональных коррелометров является то, что предложенные эмпирические способы численных значений параметров ортогональных функций (постоянных времени ортогональных фильтров), основанные на знании корреляционных функций исследуемых процессов, не позволяют получить наилучшую аппроксимацию корреляционных функций. В реальных же условиях, когда не имеется достаточной априорной информации о свойствах процесса, и постоянная времени фильтров выбирается произвольно, это обстоятельство приводит к существенным отличиям получаемой оценки корреляционной функции от действительной [53, 87, 96]. Определение же оптимального значения постоянной времени фильтров требует многократного воспроизведения исследуемого процесса, что значительно увеличивает время анализа. Метод нашел широкое применение при анализе широкополосных процессов.

Коррелометры с аппроксимацией степенными рядами обеспечивают удовлетворительные результаты лишь при малых значениях аргумента. Увеличение значения аргумента приводит к увеличению числа членов разложения ряда и усложнению коррелометра. Полученную таким образом модель корреляционной функции очень трудно использовать в дальнейших расчётах. Кроме того, затруднено вычисление таких характеристик, как интервал корреляции, показатель колебательности и т.д. Метод наиболее целесообразно применять при анализе высокочастотных процессов.

Метод разложения в ряд по ортогональным полиномам реализации исследуемых процессов с последующим вычислением корреляционных функций позволяет строить коррелометры без запаздывания [111]. Однако, техническая реализация этого метода затруднена. Кроме этого, он не свободен от указанного недостатка: неудобство модели для дальнейших исследований.

Все рассмотренные методы и реализующие их технические устройства основаны на аналоговой форме представления исследуемых процессов. Присутствующие в их составе линейные множительные устройства во многом определяют точность вычисления параметров модели, частотный диапазон, сложность аппаратной реализации и т.д. Применение кусочно-постоянных ортогональных функций Уолша, Хаара, реализуемых на базе элементов импульсной техники, позволит освободиться от указанных недостатков: упростить аппаратуру, заменить линейные множительные устройства знаковыми и т.д.

Основной недостаток этого метода заключается в сложности интерпретации полученных результатов. Так, например, при аппроксимации в базисе функций Уолша



Рисунок 2.4. Классификация методов аппроксимации корреляционных функций



корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  с погрешностью 3-5 % требуемое число членов разложения равно 16-32. Все это, в конечном счёте, затрудняет использование полученной модели в дальнейших исследованиях.

Рассмотрим 4, 5 и 8 этапы применительно к решению наиболее часто встречающихся задач аппроксимации корреляционных функций:

- функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации;
- ортогональными функциями Лагерра.

## 2.2. Метод аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида

При выбранной аналитической модели корреляционной функции задача сводится к определению неизвестных параметров, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации [50]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min. \quad (2.14)$$

Условием минимума погрешности  $\Delta$  является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = 2 \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau = 0. \quad (2.15)$$

(i = 1, ... n)

Или

$$\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau - \varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (2.16)$$

(i = 1, ... n)

где

$$\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau. \quad (2.17)$$

Разделив левые и правые части уравнений системы (2.16) на  $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ , получим:

$$\frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} d\tau - 1 = 0. \quad (2.18)$$

Введем обозначение

$$h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} \quad (2.19)$$

и умножим левые и правые части уравнений системы на  $D_x$ .

Тогда

$$\int_0^{\infty} K_x(\tau) h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) d\tau - D_x = 0. \quad (2.20)$$

(i = 1, ... n)

Учитывая, что  $K_x(\tau) = M \left[ \overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t-\tau) \right]$ , а  $D_x = M \left[ \overset{\circ}{x}^2(t) \right]$ , систему уравнений

приведем к виду:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau \right] - M \left[ \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0 \quad (2.21)$$

(i = 1, ... n)

Таким образом, задача аппроксимации корреляционных функций сводится к решению системы уравнений (2.21). Эта система может быть решена как с помощью специализированной аппаратуры, так и с помощью ЭВМ.

Аппаратура для решения этой системы будет состоять из  $n$  эквивалентных по структуре каналов. Блок-схема каждого канала имеет вид, представленный на рис 2.6 [1].

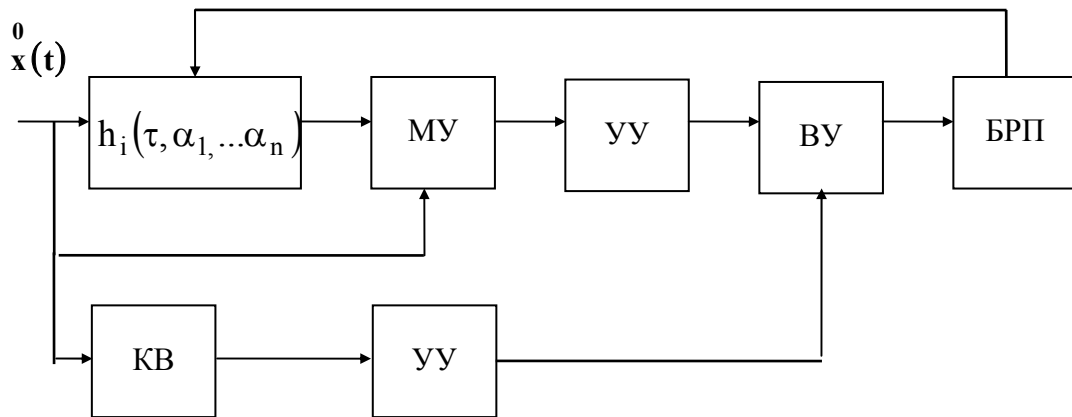


Рисунок 2.6. I-й канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Проведя преобразования, систему уравнений (2.21) можно привести к виду:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0 \quad (2.22)$$

(i = 1, ... n)

Структурная схема i-ого канала этого коррелометра, представленная на рис.2.7, отличается от предыдущей перестановкой блоков и отсутствием одного усредняющего устройства [87].

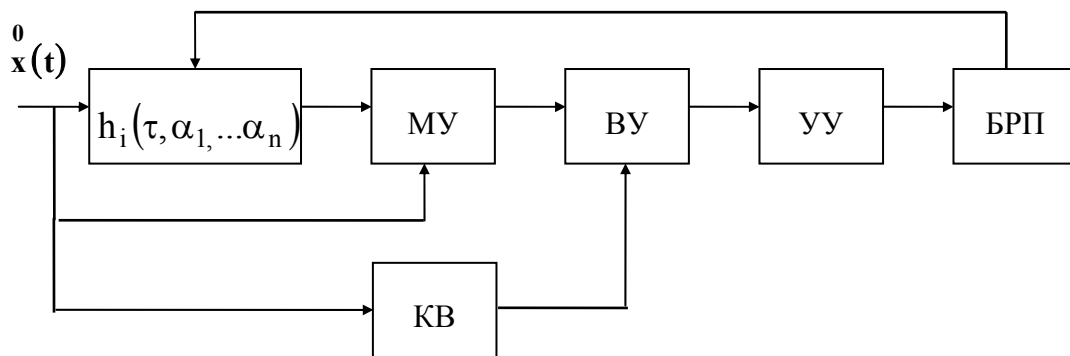


Рисунок 2.7. I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Если привести систему уравнений (2.21) к виду

$$M \left\{ \overset{\circ}{x}(t) \left[ \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}(t) \right] \right\} = 0, \quad (2.23)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

возможна ещё одна аппаратная реализация каждого канала (см. рис 2.8). Заметим, что в структуре канала отсутствует квадратор, что, в свою очередь, упрощает его техническую реализацию [87].

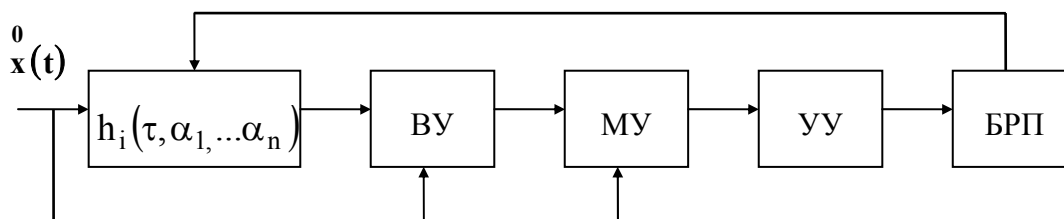


Рисунок 2.8. I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

На рис. 2.9 приведена одна из разработанных структурных схем двухканального коррелометра с аппроксимацией [7].

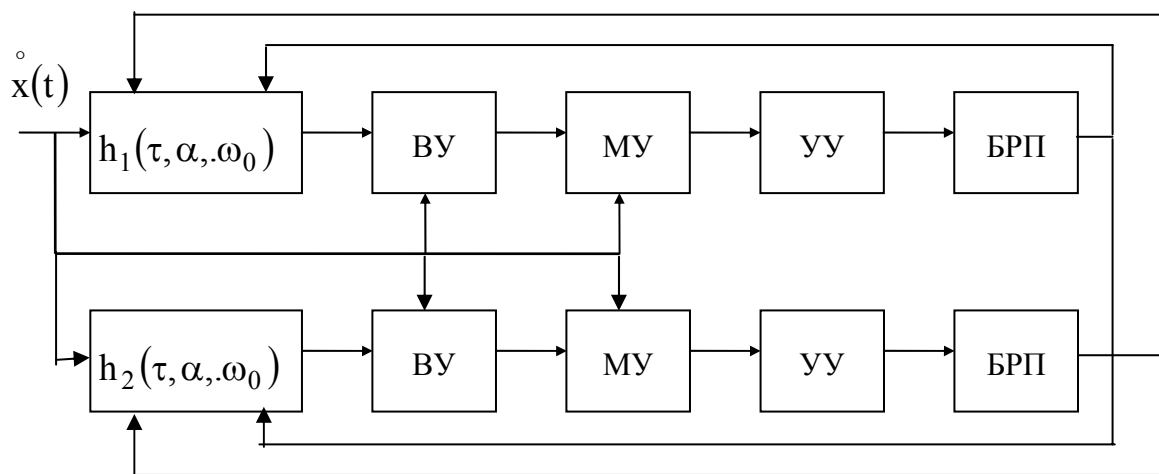


Рисунок 2.9. Двухканальный коррелометр

В [12] разработана еще одна структурная схема для аппроксимации корреляционных функций двухпараметрическими моделями, представленная на рис. 2.10.

На рис. 2.10 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормирования; 2 – фильтр с регулируемыми параметрами; 3, 8, 13 – блоки вычитания; 4, 9 – блок умножения; 5, 10 – блок усреднения; 6, 7 – блоки регулировки параметров; 11 – регулируемый функциональный преобразователь; 12- блок оценки интервала корреляции; 14 – блок деления.

Блок 12 формирует оценку интервала корреляции в виде несобственного интеграла от квадрата нормированной корреляционной функции [96].

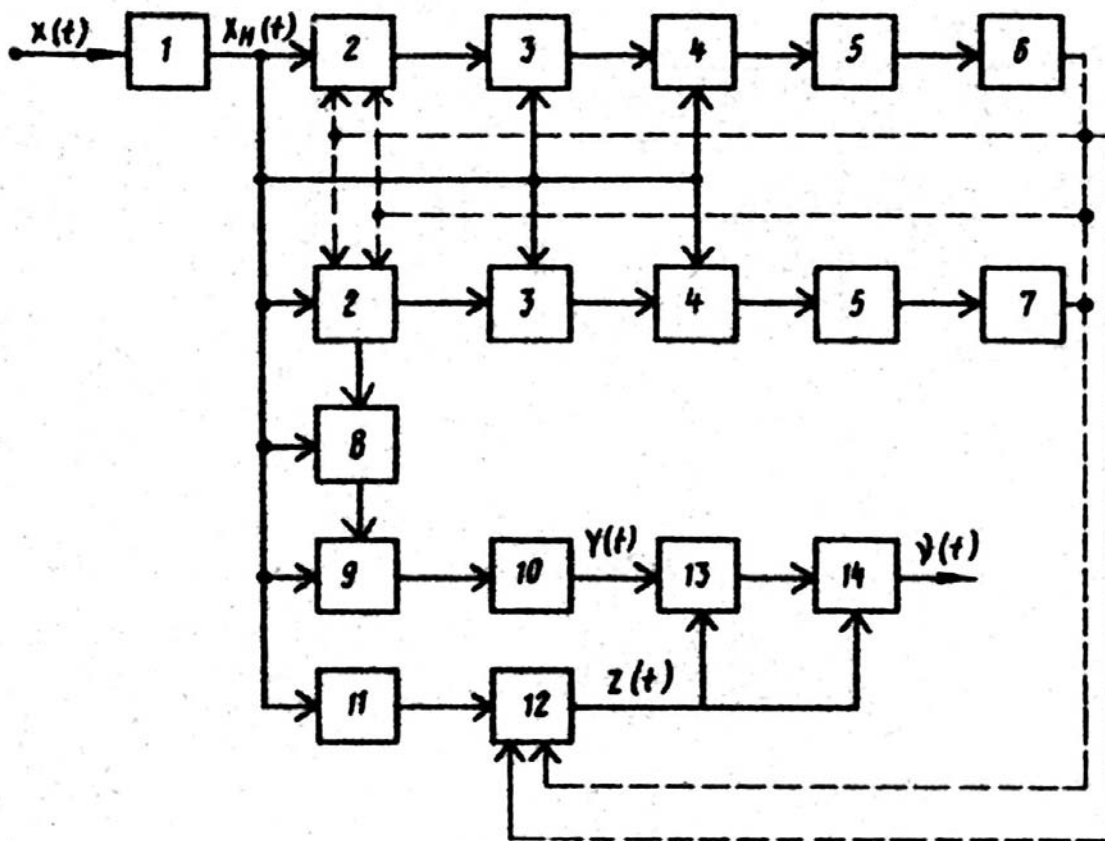


Рисунок 2.10. Коррелометр с аппроксимацией двухпараметрическими моделями

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на вход стационарного центрированного случайного процесса блоки регулировки параметров 6, 7 изменяют параметры фильтров 2 до обнуления сигналов на выходах блоков усреднения 5. Установившиеся значения параметров фильтров принимаются в качестве параметров одной из заданных моделей корреляционных функций. При этом обеспечивается минимум относительной погрешности аппроксимации корреляционной функции исследуемого случайного процесса выбранной моделью.

В [10] была разработана структурная схема коррелометра с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью, представленная на рис. 2.11.

На рис. 2.11 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормировки; 2 – источник эталонного напряжения; 3, 14 – блоки вычитания; 4, 8, 9 – блоки умножения; 5 – регулируемый фильтр; 6, 7 – ключи; 10, 11 – сумматоры; 12, 13 – блоки усреднения; 15 – блок регулировки параметра; 16 – блок регулировки частоты; 17 – генератор ортогональных сигналов.

Устройство работает следующим образом. При поступлении на вход блока нормировки, являющийся входом устройства, центрированной реализации случайного процесса  $x(t)$  блок 15 изменяет параметр  $\alpha$  регулируемого фильтра с передаточ-

ной функцией  $W(p, \alpha) = \frac{\pi}{2(1 + p/\alpha)^2}$ . В свою очередь, блок 16 изменяет частоту генератора 17 до обнуления выходных сигналов блоков 12 и 13. Установившиеся значения параметра  $\alpha$  и частоты  $\omega_0$  принимаются в качестве оценки параметров нормированной корреляционной функции  $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Предлагаемый коррелометр позволяет оценить параметры аппроксимирующего выражения, удовлетворяющие минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

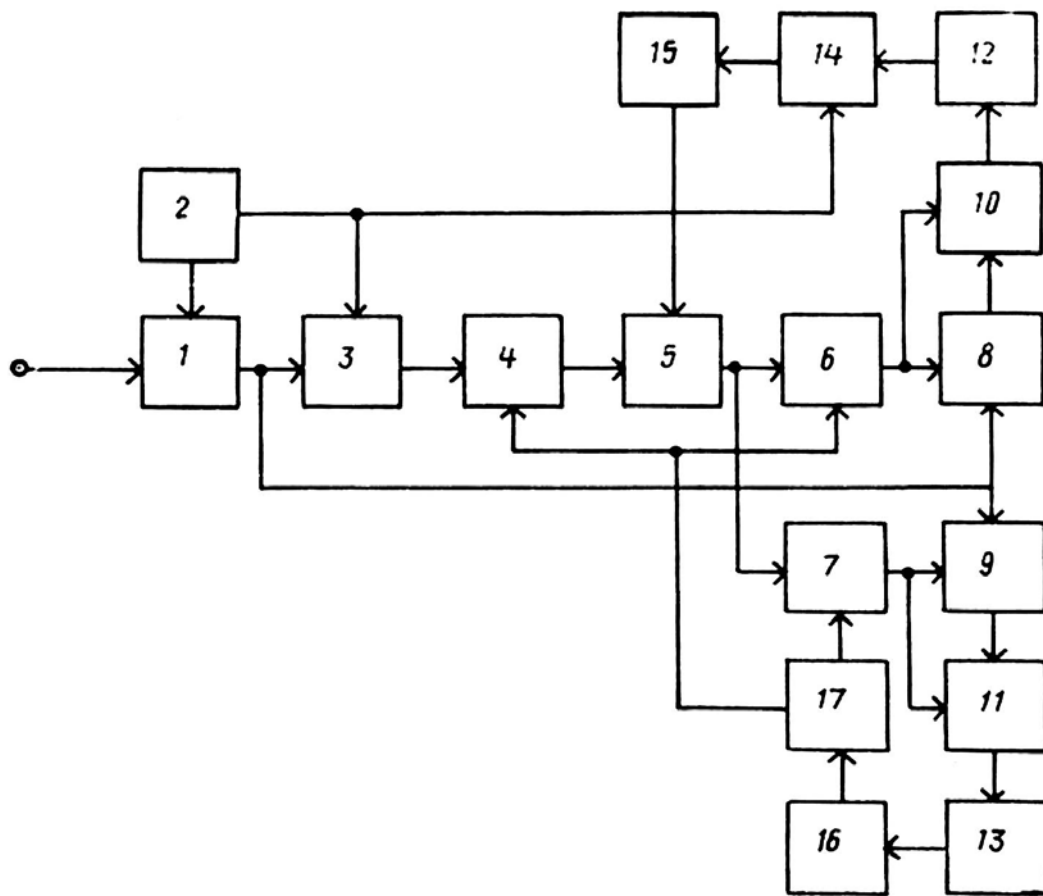


Рисунок 2.11. Коррелометр с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью

Как следует из рисунков 2.9-2.11, каналы регулирования взаимосвязаны, процесс уравнивания затруднен, в схеме имеется значительное число регулируемых элементов.

От ряда недостатков можно избавиться, если параметр затухания модели определять по минимуму квадратической погрешности также, как и для аппроксимирующей функции  $e^{-\alpha|\tau|}$ , а частоту колебания корреляционной функции  $\omega_0$  - как для функций  $\rho_{a5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\rho_{a6,7}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \pm \sin \omega_0 |\tau|)$ .

Алгоритм определения параметров модели заключается в следующем [87]. При поступлении на вход коррелометра реализации стационарного случайного процесса значение первого параметра  $\alpha^*$ , определяемое в первом канале, устанавливается во втором фильтре. Затем определяется частота колебаний  $\omega_0^*$  во втором канале.

Из рис. 2.6-2.11 видно, что одним из основных элементов схемы являются фильтры с регулируемыми параметрами, импульсные характеристики  $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  которых полностью определяются выбранными аналитическими выражениями корреляционных функций [50, 87]. Таким образом, задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций сводится, в основном, к синтезу этих фильтров. В таблице 2.2 приведены, для примера, импульсные характеристики фильтров с регулируемыми параметрами для типовых аппроксимирующих моделей нормированных корреляционных функций, а в таблице 2.3 – их передаточные функции.

### Импульсные характеристики для типовых аппроксимирующих выражений КФ

Таблица 2.2

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$h_i(\tau, \alpha, \omega_0)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$1,6\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$16\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau} - 8\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$
4	$e^{-\alpha \tau } \left(1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3}\right)$	$\frac{8}{21}\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau} + \frac{8}{21}\alpha^4 \tau^3 e^{-\alpha\tau}$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0  \tau $	$\frac{8\alpha^2(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{2\alpha^4 + \alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \tau e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau$
		$\frac{4(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha\omega_0} \tau \sin \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{8\alpha^2(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{5\alpha^4 - 2\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \left[ \tau e^{-\alpha\tau} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau) - \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau \right]$
		$\frac{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha\omega_0} e^{-\alpha\tau} \left[ \frac{\alpha\tau}{\omega_0} \cos \omega_0 \tau - \left( \tau + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \right) \sin \omega_0 \tau \right]$

Передаточные функции фильтров с регулируемыми параметрами

Таблица 2.3

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$W(p, T, k)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{4}{(1+Tp)^2}$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau )$	$\frac{3,2}{(1+Tp)^3}$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau )$	$\frac{16Tp}{(1+Tp)^3}$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$\frac{16(4+Tp)}{21(1+Tp)^4}$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{8(k+1)}{k} \left[ \frac{1}{1+k \frac{1}{(1+Tp)^2}} \right]^2 \times$ $\times \left[ \left( \frac{Tp}{1+Tp} \right)^2 - (1+k) \frac{1}{(1+Tp)^2} \right];$ $8(k+1) \left[ \frac{1}{1+k \frac{1}{(1+Tp)^2}} \right]^2 \frac{1}{1+Tp};$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$8(k+1) \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{Tp}{1+Tp};$ $\frac{1}{\left[ 1+k \frac{1}{(1+Tp)^2} \right]^2} \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{1+Tp/2}{1+Tp};$

### 2.3. Анализ методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций

При аппроксимации корреляционных функций тем или иным аналитическим выражением возникает задача оценки точности приближения. Решить её для самого общего случая при произвольном виде корреляционной функции не представляется возможным. Поэтому наиболее целесообразно определять относительные методические погрешности аппроксимации для конкретных видов корреляционной функции, выбранных моделей [87, 96]:

$$\delta = \frac{\int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau}. \quad (2.24)$$

Задача имеет простое решение в случае аппроксимации однопараметрических нормированных корреляционных функций исследуемых процессов вида  $\rho_{x1}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$ ,  $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$ ,  $\rho_{x3}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$ ,  $\rho_{x4}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)$ ,  $\rho_{x5}(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau}$  и т.д. [77].

Для этого необходимо: решить систему уравнений (2.15), определить оптимальное значение параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , затем, подставив их в формулу (2.24), найти численное значение  $\delta$ .

Определим оптимальное значение параметра модели  $\rho_{a1}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$   $\alpha$  и погрешность аппроксимации полосового шума с нормированной корреляционной функцией  $\rho_{x5}(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau}$ . Подставив  $\rho_{x5}(\tau)$  и  $h(\tau, \alpha) = 4\alpha^2\tau e^{-\alpha\tau}$  в (2.20), получим:

$$4\alpha^2 \int_0^{\infty} \tau e^{-\alpha\tau} \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau} d\tau - 1 = 0. \quad (2.25)$$

Произведя все необходимые преобразования, определим:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta\omega_3. \quad (2.26)$$

Определим методическую погрешность аппроксимации. Для этого необходимо подставить  $\rho_{x5}(\tau)$  и  $\rho_{a1}(\tau)$  в (2.24) и произвести все необходимые преобразования. Окончательно получим:

$$\delta = 1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_3}{\alpha} + \frac{\Delta\omega_3}{\alpha\pi}. \quad (2.27)$$

С учётом (2.26)  $\delta=0,22$ .

Аналогично определяются оптимальные значения параметров и погрешности аппроксимации в других случаях, результаты расчётов которых представлены в таблице 2.4.



Оптимальные значения параметров и погрешности аппроксимации  
корреляционных функций параметрическими моделями

Таблица 2.4

Вид модели	$\rho_x(\tau)$	Параметр	$\delta$
$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = \lambda$	0
	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$\alpha = 0,467 \lambda$	0,06
	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$\alpha = 2,75 \lambda$	0,16
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta\omega_3$	0,22
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau )$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = 2,14 \lambda$	0,06
	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$\alpha = \lambda$	0
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 1,22 \Delta\omega_3$	0,21
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau )$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = 0,365 \lambda$	0,16
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 0,3 \Delta\omega_3$	0,17
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 1,45 \Delta\omega_3$	0,14
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = \Delta\omega_3 / 3$ $\omega_0 = \sqrt{2} \Delta\omega_3 / 3$	0,136

При аппроксимации корреляционных функций многопараметрическими моделями задача усложняется, так как приходится решать системы алгебраических уравнений высокого порядка. Для определения оптимальных параметров и методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций  $\rho_{x6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,

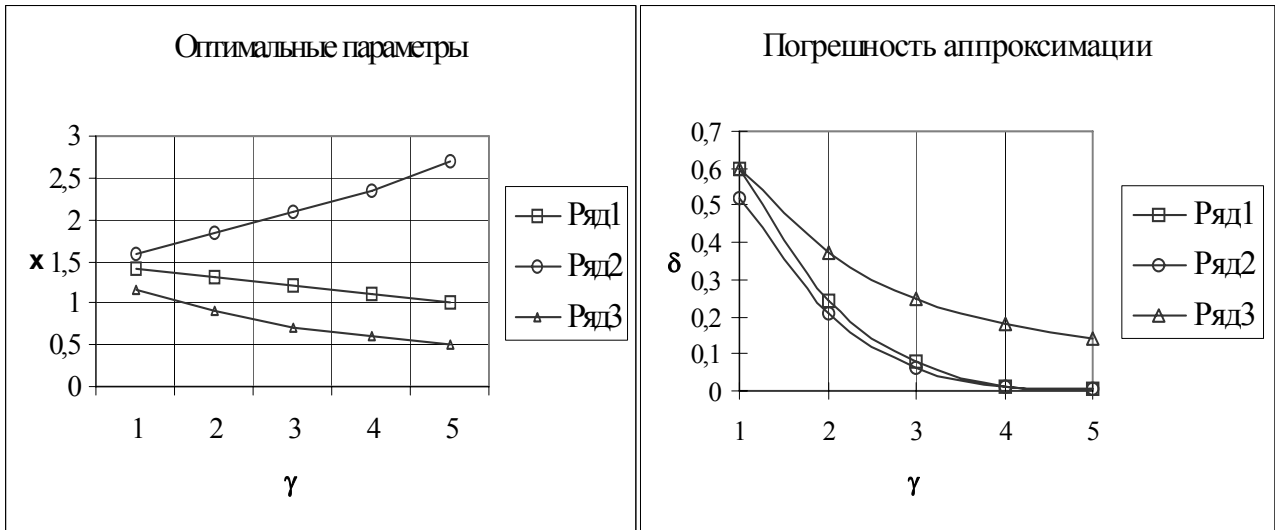
$$\rho_{x7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \quad \rho_{x8}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

функцией  $e^{-\alpha|\tau|}$  при различных  $\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$  были составлены программы для

ЭВМ, и проведен счёт, результаты которого представлены на рис. 2.12 а) - зависимость относительного параметра модели  $x = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} = \varphi(\gamma)$ , рис. 2.12 б)- методическая погрешность аппроксимации  $\delta = \psi(\gamma)$ . На рис. 2.13 приведены аналогичные

результаты для модели  $e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ . На рис. 2.12 ряд1 отражает результаты расчёта

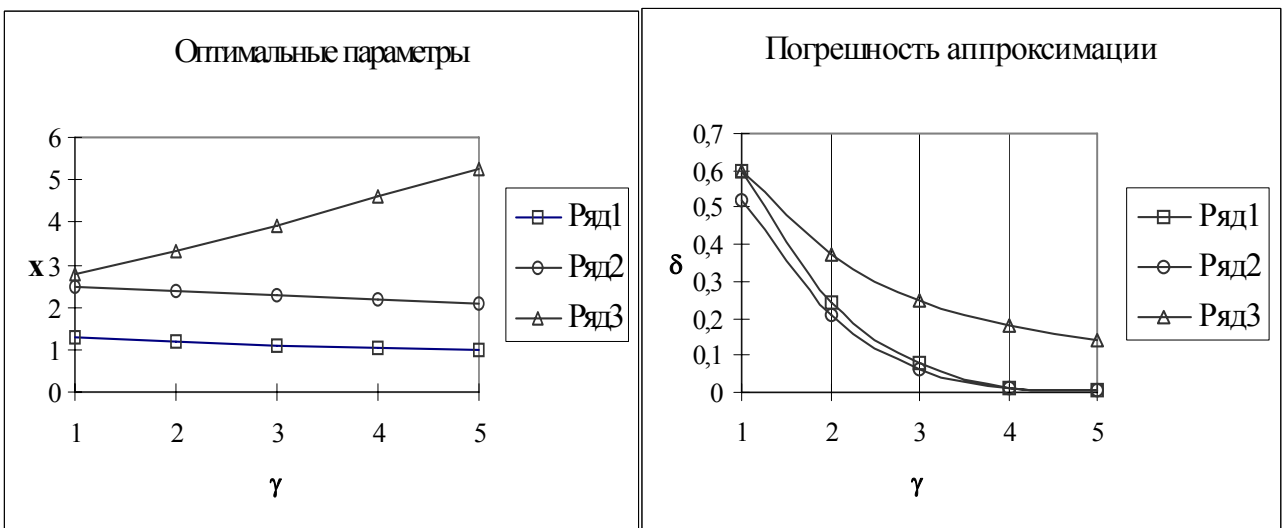
для  $\rho_{x6}(\tau)$ , ряд 2 -  $\rho_{x8}(\tau)$ , ряд 3 -  $\rho_{x7}(\tau)$ . На рис. 2.13 ряд1 -  $\rho_{x7}(\tau)$ , ряд 2 -  $\rho_{x6}(\tau)$ , ряд 3-  $\rho_{x8}(\tau)$ .



а)

б)

Рисунок 2.12.



а)

б)

Рисунок 2.13.

Из анализа графических зависимостей и результатов табл. 2.4 видно, что погрешности аппроксимации существенно зависят от вида модели корреляционной функции исследуемого процесса и соотношения её параметров. При этом, во многих практических случаях возможно с достаточной степенью точности аппроксимировать корреляционную функцию широкополосных случайных процессов функциями вида  $e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$ . При аппроксимации корреляционных функций узкополосных процессов необходимо применять более сложные аналитические выражения, например:  $e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

## 2.4. Анализ статистических погрешностей аппроксимации корреляционных функций

При построении аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов функциями заданного вида одной из важнейших задач является выбор параметров сглаживающих устройств, обеспечивающих допустимые статистические погрешности.

Выберем в качестве модели однопараметрическую функцию  $\rho_a(\tau, \alpha)$  [51, 87]. Для определения ее параметра необходимо решить уравнение:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0. \quad (2.28)$$

Введем обозначение:

$$y(t) = \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t). \quad (2.29)$$

В качестве оценки математического ожидания сигнала  $y(t)$  примем сигнал на выходе ФНЧ (см. рис. 2.7) с импульсной характеристикой  $h_1(\tau) = \frac{1}{T_\phi} e^{-\frac{\tau}{T_\phi}}$ , где  $T_\phi$  - постоянная времени фильтра.

Тогда

$$M^*[y(t)] = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) y(t - \tau_1) d\tau_1 = \varphi(\alpha). \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) зависит от оцениваемого параметра  $\alpha$ . Учитывая, что полоса пропускания ФНЧ  $\Delta\omega_\phi$  значительно уже эквивалентной ширины спектра мощности сигнала  $\overset{\circ}{x}(t)$   $\Delta\omega_c$  и полосы пропускания фильтра с регулируемыми параметрами  $\Delta\omega_1$ , разложим (2.30) в ряд Тейлора в окрестности оптимального параметра  $\alpha_0$ , ограничившись при этом линейными членами:

$$\varphi(\alpha_0) + \frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha^* - \alpha_0) = 0, \quad (2.31)$$

где  $\alpha^*$  - оценка параметра.

Отсюда

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.32)$$

Из выражений (2.30), (2.32) видно, что  $\alpha^*$  является случайной величиной. Требования, предъявляемые к оценке  $\alpha^*$ , сводятся к выполнению следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{см} = \frac{M[\alpha^*] - \alpha_0}{\alpha_0} \leq \gamma_{см доп} \\ \gamma_M = \sqrt{\frac{D[\alpha^*]}{\alpha_0^2}} \leq \gamma_M доп \end{array} \right. , \quad (2.33)$$

где  $\gamma_{\text{см}}$  - погрешность от смещенности оценки;

$\gamma_{\text{м}}$  - методическая статистическая погрешность;

$\gamma_{\text{см доп}}, \gamma_{\text{м доп}}$  - допустимые значения погрешностей.

Разложим (2.32) в ряд Тейлора по  $\varphi(\alpha_0)$  и  $\varphi'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$  в окрестностях  $M[\varphi(\alpha_0)]$  и  $M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}$ , ограничившись линейными членами. С учётом (2.28) и (2.30), получим;

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.34)$$

Для определения методических статистических погрешностей  $\gamma_{\text{м}}$  необходимо найти дисперсию оценки  $\alpha^*$ :

$$D[\alpha^*] = \frac{M[\varphi^2(\alpha)]}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.35)$$

С учётом (2.29) и (2.30) числитель в выражении (2.35) равен:

$$\begin{aligned} M[\varphi^2(\alpha_0)] = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h(\tau_3, \alpha) M \left[ \overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \times \right. \\ & \left. \times \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \right] d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) h(\tau, \alpha) \times \\ & \left. \times M \left[ \overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \right] d\tau d\tau_1 + \sigma_x^4. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для определения  $M[\varphi^2(\alpha_0)]$  необходимо найти центральный момент четвертого порядка  $M \left[ \overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \right]$ . Решим эту задачу для нормальных случайных процессов. В этом случае следующая связь центрального момента четвертого порядка с моментами второго порядка [82]:

$$\begin{aligned} M \left[ \overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \right] = & \sigma_x^4 [\rho_x(\tau_2 - \tau_1) \rho_x(\tau_3 + \tau_2 - \tau - \tau_1) + \\ & \rho_x(\tau_3 + \tau_2 - \tau_1) \rho_x(\tau_2 - \tau - \tau_1) + \rho_x(\tau) \rho_x(\tau_3) ] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подставив (2.37) в (2.36) и произведя ряд преобразований, получим:

$$\begin{aligned} M[\varphi^2(\alpha_0)] = & \sigma_x^4 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{хн}}(\omega_1) S_{\text{хн}}(\omega) |W_1[j(\omega + \omega_1)]|^2 |W(j\omega)|^2 d\omega d\omega_1 + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{хн}}(\omega_1) S_{\text{хн}}(\omega) |W_1[j(\omega + \omega_1)]|^2 W(-j\omega_1) W(j\omega) d\omega d\omega_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $S_{xH}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  - нормированная спектральная плотность мощности

процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;

$W(j\omega)$  - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;

$W_1(j\omega)$  - частотная характеристика ФНЧ.

Приняв во внимание, что  $\Delta\omega_c \gg \Delta\omega_\phi$ , выражение (2.38) преобразуем к виду:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 4\sigma_x^4 \Delta\omega_\phi \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}^2(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.39)$$

Для упрощения расчетов возможно указать несколько оценок сверху выражения (2.39).

1 оценка сверху:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 26\sigma_x^4 \frac{\Delta\omega_\phi \Delta\omega_1}{\Delta\omega_{c2}^2} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (2.40)$$

где  $\Delta\omega_{c2} = \frac{\int_0^{\infty} S_{xH}(\omega) d\omega}{S_{xH}(\omega)_{\max}}$  - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала  $\overset{\circ}{x}(t)$ .

2 оценка сверху:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 2\sigma_x^4 \frac{\Delta\omega_\phi \Delta\omega_{c4}}{\Delta\omega_{c2}^2} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (2.41)$$

где  $\Delta\omega_{c4} = \frac{\int_0^{\infty} S_{xH}^2(\omega) d\omega}{S_{xH}^2(\omega)_{\max}}$  - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала  $\overset{\circ}{x}(t)$ .

Знаменатель в (2.35) равен:

$$M^2[\varphi'(\alpha)]_{|\alpha=\alpha_0} = \left[ \sigma_x^2 \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2. \quad (2.42)$$

Таким образом, первая оценка сверху выражения (2.35) меньше или равна:

$$D_1[\alpha^*] \leq \frac{2\Delta\omega_\phi \Delta\omega_1 |W(j\omega)|_{\max}^2}{\Delta\omega_{c2}^2 \left[ \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2}. \quad (2.43)$$

Вторая оценка сверху:

$$D_2[\alpha^*] \leq \frac{2\Delta\omega_\phi \Delta\omega_{c4} |W(j\omega)|_{\max}^2}{\Delta\omega_{c2}^2 \left[ \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2}. \quad (2.44)$$

Учитывая соотношения неопределенности [96]:

$$\tau_k^{(4)} \frac{\Delta\omega_{c2}^2}{\Delta\omega_{c4}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \text{ и } \Delta\omega_1 T_\phi = \frac{\pi}{2}, \quad (2.45)$$

можно показать, что 1 оценка сверху  $D_1[\alpha^*]$  является более завышенной  $D_1[\alpha^*] = \frac{\pi}{2} D_2[\alpha^*]$ . Поэтому, для определения  $\gamma_m$  целесообразнее воспользоваться второй оценкой сверху  $D_2[\alpha^*]$ .

Тогда

$$\gamma_{m2} = \sqrt{\frac{D_2[\alpha^*]}{\alpha_0^2}} \leq C_1 \sqrt{\frac{\tau_k^{(4)}}{T_\phi}}, \quad (2.46)$$

где

$$C_1 = \frac{2|W(j\omega)|_{\max}}{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4} \alpha_0 \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau}} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.47)$$

Величина  $C_1$ , для разных видов  $\rho_x(\tau)$  и соотношений их параметров  $\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}$ , представлена в таблице 2.5. Из формулы (2.46) и результатов таблицы 2.5 видно, что методические статистические погрешности зависят как от вида  $\rho_x(\tau)$  и  $\gamma$ , так и от отношения  $\frac{\tau_{k4}}{T_\phi}$ .

При определении погрешности от смещенности по формуле (2.34) оценка получается несмещенной. Разложив (2.34) в ряд Тейлора по  $\varphi(\alpha_0)$  и  $\varphi'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$  в окрестностях  $M[\varphi(\alpha_0)]$  и  $M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}$ , ограничившись квадратичными членами, получим:

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha_0)}{M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}} + \frac{\varphi(\alpha_0) \varphi'(\alpha)}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.48)$$

Погрешность от смещенности, в соответствии с (2.33), будет равна:

$$\gamma_{см} \approx \frac{M[\varphi(\alpha_0) \varphi'(\alpha)]}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0} \alpha_0}. \quad (2.49)$$

С учётом допущений, принятых при выводе формул (2.43)-(2.45) и выражения (2.42), погрешность от смещенности приведем к виду:

$$\gamma_{см} \leq C_2 \frac{\tau_{k4}}{\tau_k^{(4)}}, \quad (2.50)$$

где

$$C_2 = \frac{\operatorname{Re}[W(j\omega)]_{\max} \operatorname{Re}[W_2(j\omega)]_{\max}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha_0 \left[ \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]^2}_{|\alpha=\alpha_0}, \quad (2.51)$$

а

$$W_2(j\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.52)$$

В таблице 2.5 приведены численные значения  $C_2$  для различных  $\rho_x(\tau)$  и  $\gamma$ . Из анализа выражений (2.50), (2.51) и результатов представленных в таблице 2.5, видно, что погрешность от смещенности, как и методическая, зависит от вида  $\rho_x(\tau)$ ,  $\gamma$  и отношения  $\frac{\tau_{k4}}{T_\phi}$ , но выбором постоянной времени ФНЧ всегда возможно обеспечить допустимые статистические погрешности.

#### К анализу статистических погрешностей

Таблица 2.5

$\rho_a(\tau, \alpha)$	$\rho_x(\tau)$	$\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$	$C_1$	$C_2$
$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\lambda \tau }$		7,2	2,45
	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	0	2,4	0,28
		0,25	3,2	0,5
		0,5	4,2	0,8
		0,75	6,2	1,8
		1	7,2	2,45
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$		4,8	1,1
$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$e^{-\lambda \tau }$		6	2,8
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$		1,2	0,11

## 2.5 Влияние неточности оценки параметров модели на погрешность аппроксимации корреляционных функций

Минимальное значение погрешности аппроксимации, определяемое по формуле (2.14), будет достигнуто тогда, когда все элементы аппаратуры идеальны, а параметры модели определены оптимально [87]. В реальных же условиях оценка параметров модели сопровождается аппаратурными погрешностями, которые, в конечном счете, приводят к увеличению методических погрешностей аппроксимации. В связи с этим необходимо оценить влияние неточности определения параметров аппроксимирующей функции на погрешность аппроксимации.

Для этого разложим (2.14) в ряд Тейлора в окрестностях оптимальных параметров  $\alpha_{i0}$ . Так как при аппроксимации нормированной корреляционной функции требуется, в основном, определять два параметра:  $\alpha$  - показатель затухания и  $\omega_0$  - частоту колебания корреляционной функции, то, не снижая общности рассуждения, разложим (2.14) в ряд Тейлора по двум параметрам, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta(\alpha_0 + \omega_0) + \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0) + \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} (\alpha - \alpha_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} (\alpha - \alpha_0)(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (2.53)$$

После нахождения производных в выражении (2.53), необходимо в них подставить  $\alpha = \alpha_0$  и  $\omega = \omega_0$ . Учитывая выражения (2.15),

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega} = 0 \end{cases},$$

а  $\Delta(\alpha_0, \omega_0) = \Delta_{\min}$ .

Подставив в (2.53) выражение (2.14) и произведя ряд промежуточных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \Delta - \Delta_{\min} = (\alpha - \alpha_0)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau \right\} + (\omega - \omega_0)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau \right\} + \\ + (\alpha - \alpha_0)(\omega - \omega_0) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2.54)$$



Найдем относительное изменение погрешности аппроксимации от неточности оценки параметров:

$$\gamma^* = \frac{\Delta - \Delta_{\min}}{\Delta_{\min}} = \frac{\Delta - \Delta_{\min}}{\tau_k^{(4)} \delta}. \quad (2.55)$$

где  $\delta$  - относительная методическая погрешность аппроксимации.

С учётом (2.55) выражение (2.54) примет вид:

$$\begin{aligned} \gamma^* = \frac{1}{\tau_k^{(4)}} \left\{ \alpha_0^2 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau \right\} + \omega_0^2 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau \right\} + \right. \\ \left. + \alpha_0 \omega_0 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Методическая погрешность аппроксимации в этом случае равна:

$$\delta^* = \delta(1 + \gamma^*). \quad (2.57)$$

Исследования, проведенные в [87], показали, что неточность определения параметров аппроксимирующего выражения в 10 - 20 % незначительно увеличивает погрешность аппроксимации. Причём, чем больше погрешность аппроксимации, тем менее чувствительна она к неточности оценки параметров и наоборот. Это обстоятельство, в свою очередь, снижает требования к аппаратуре.

Так, например, при аппроксимации нормированной корреляционной функции  $\rho_x(\tau) \frac{\sin \Delta \omega_3 \tau}{\Delta \omega_3 \tau}$  моделью  $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$\gamma^* = 1,07 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 + 4,80 \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 + 0,52 \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right). \quad (2.58)$$

Из полученного выражения видно, что неточность оценки частоты колебания корреляционной функции больше влияет на увеличение методической погрешности аппроксимации и, следовательно, её необходимо точнее оценивать.

## 2.6. Принципы построения основных блоков коррелометров с аппроксимацией

Выбор основных блоков коррелятора с аппроксимацией зависит от предъявляемых к нему требований. Требования простоты аппаратурной реализации и работы в реальном масштабе времени приводят к разработке специализированных аналоговых или аналого-цифровых вычислительных устройств [87], решающих систему уравнений (2.20).

Основными блоками коррелятора с аппроксимацией являются фильтры с регулируемыми параметрами, множительные, вычитающие устройства, центрирующий и усредняющий фильтры.

Как показано в [50], задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций заданного вида сводится, в основном, к синтезу фильтров с регулируемыми параметрами с импульсными характеристиками  $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  (2.19), полностью определяемыми выбранным аналитическим выражением. Предъявляемые к ним требования заключаются в минимуме регулируемых элементов, простоте технической реализации, использовании типовых элементов и блоков. Из таблицы 2.3 видно, что фильтры с регулируемыми параметрами состоят из более простых фильтров с передаточными функциями:

$$W_1(p) = \frac{1}{1 + Tp}; \quad W_2(p) = \frac{Tp}{1 + Tp}; \quad W_3(p) = \frac{Tp/2}{1 + Tp}, \quad (2.59)$$

где  $\alpha = 1/T$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k}/T$ ,

и усилителей с постоянными и переменными коэффициентами усиления.

Фильтры легко могут быть реализованы базе RC-цепей в сочетании с операционными усилителями в интегральном исполнении, охваченными отрицательной обратной связью.

При построении коррелометров с аппроксимацией двухпараметрическими моделями  $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$  требуется синтезировать фильтры

с импульсными характеристиками вида:

$$\begin{cases} h_1(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ h_2(\tau) = h(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{cases}, \quad (2.60)$$

где  $h(\tau)$ - импульсная характеристика физически реализуемого фильтра.

Исследования показали, что фильтры с импульсными характеристиками (2.60) могут быть синтезированы следующим образом (см. рис. 2.14).

Рассмотрим подробнее схему, представленную на рис. 2.14 а). Выходные сигналы с выходов фильтров с импульсной характеристикой  $h(\tau)$  в установившемся режиме будут равны:

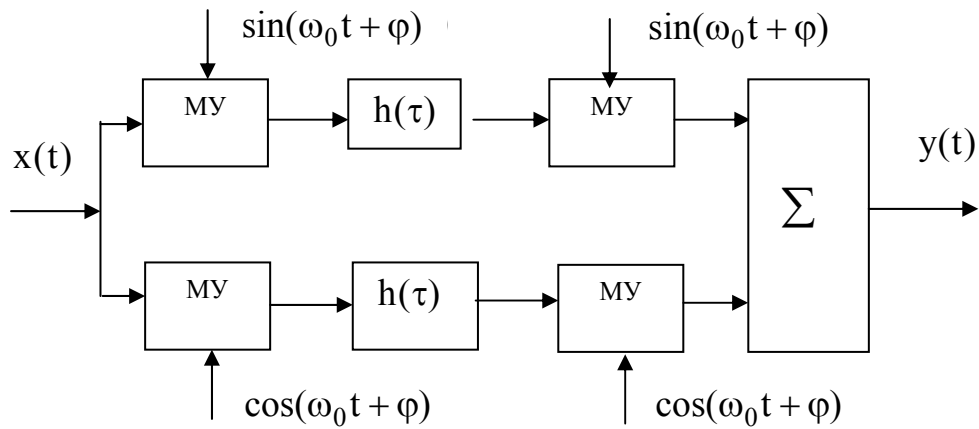
$$\begin{cases} y_1(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) \sin[\omega_0(t-\tau) + \varphi] \sin(\omega_0 t + \varphi) h(\tau) d\tau; \\ y_2(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) \cos[\omega_0(t-\tau) + \varphi] \cos(\omega_0 t + \varphi) h(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (2.61)$$

Сигнал на выходе сумматора

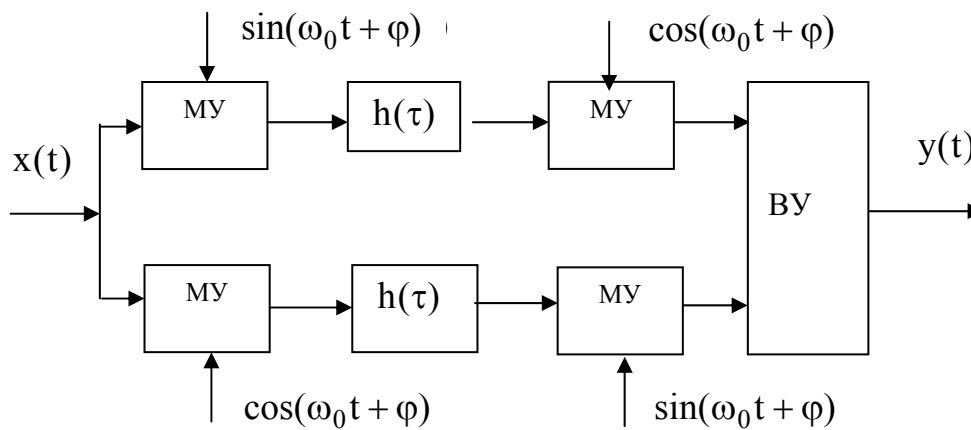
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega_0 \tau x(t-\tau) d\tau$$

в установившемся режиме описывает процесс на выходе линейного звена с импульсной характеристикой  $h_1(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau$ .

Аналогично можно показать, что импульсная характеристика фильтра (см. рис. 2.14 б)) равна выражению  $h_2(\tau) = h(\tau) \sin \omega_0 \tau$ .



а)



б)

Рисунок 2.14. Фильтры с регулируемыми параметрами

Определив требования, предъявляемые к фильтрам с регулируемыми параметрами, рассмотрим остальные элементы.

Для центрирования процесса и получения интересующих оценок необходимы центрирующий фильтр, например, с передаточной функцией  $W_{\text{ц}}(p) = \frac{T_{\text{ц}}p}{1 + T_{\text{ц}}p}$  и

сглаживающий фильтр, например, фильтр нижних частот с  $W_{\text{ф}}(p) = \frac{T_{\text{ф}}p}{1 + T_{\text{ф}}p}$ . Вопро-

сы построения этих фильтров, расчёт их параметров для обеспечения допустимых аппаратных и статистических погрешностей рассматриваются в [87]. Блок-схемы центрирующего фильтра и фильтра нижних частот аналогичны блок-схемам фильтров с регулируемыми параметрами. Единственное отличие заключается в том, что постоянные времени  $T_{\text{ц}} \gg \tau_k$ ,  $T_{\text{ф}} \gg \tau_k$  [87].

В качестве вычитающих устройств, усилителей с постоянными и переменными коэффициентами усиления также возможно применение операционных усилителей в интегральном исполнении [87].

Таким образом, все блоки коррелометра, кроме множительного устройства, могут быть выполнены на одной элементной базе - операционных усилителях в инте-

гральном исполнении. От выбора множительного устройства существенным образом зависит частотный диапазон исследуемых сигналов, точность и простота технической реализации аппаратуры. Вопросам теории, расчёта множительных устройств и их применения для корреляционных измерений посвящен целый ряд работ. При этом, как правило, предпочтение отдается косвенным методам умножения, наиболее распространенным из которых является четырехкватратный метод [102]. Это объясняется тем, что, во-первых, получаемая точность умножения удовлетворяет требованиям корреляционных измерений, а во-вторых, множительные устройства такого типа выпускаются промышленностью и входят в состав аналоговых моделирующих установок.

Заметим, что при решении системы уравнений (2.21) при помощи аппаратуры необходимо индексировать равенство нулю корреляционных моментов [48]:

$$M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] = 0, \quad (2.63)$$

где

$$\overset{\circ}{y}_i(t) = \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t - \tau) - \overset{\circ}{x}(t). \quad (2.64)$$

Т. е. необходимо такое устройство, выходной сигнал которого был бы отличен от нуля при  $M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] \neq 0$  и равнялся бы нулю при  $M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] = 0$ .

В общем виде блок-схема такого устройства должна включать в себя функциональный преобразователь с функцией преобразования  $\psi \left( \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i \right)$  и фильтр нижних частот. Выходной сигнал фильтра нижних частот является оценкой математического ожидания сигнала  $z(t)$ :

$$\overset{\circ}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - m_x, y_i - m_{y_i}) f(x, y_i) dx dy_i = \gamma(K_{xy}). \quad (2.65)$$

Как видно из (2.65), вид функции  $\gamma(K_{xy})$  зависит от типа функционального преобразователя и от вида совместной плотности распределения вероятностей  $f(x, y_i)$ .

Таким образом, для выполнения условия (2.63) необходимо, чтобы

$$\gamma(K_{xy}) = \begin{cases} 0, & \text{если } K_{xy} = 0; \\ c, & \text{если } K_{xy} \neq 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

где  $c$  - произвольная отличная от нуля величина.

Самый простой вид функции  $\psi \left( \overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i \right)$  может быть реализован множительным устройством. В этом случае условие (2.63) выполняется автоматически, независимо от вида  $f(x, y_i)$ . Но так как построение точного множительного устройства, особенно для достаточно широкого диапазона частот, представляет весьма сложную задачу, основное внимание сосредоточим на сравнительном анализе таких функциональных преобразователей, которые применяются для косвенных методов оценки корреляци-

онной функции. При этом необходимо иметь в виду, что в рассматриваемом случае абсолютно не важен вид  $\gamma(K_{xy})$ , как в корреляционном анализе [80], а важно лишь выполнение условия (2.63). Последняя оговорка существенна, т.к. расширяет класс функций  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i\right)$  и устройств, которые могут быть применены для этих целей.

Рассмотрим функцию  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}$ , широко используемую при полярном методе анализа корреляционной функции [80]. В этом случае

$$\gamma(K_{xy}) = M\left[\text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}\right]. \quad (2.67)$$

Подставляя в (2.67) значения

$$\text{sign } \overset{\circ}{x} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju_1 \overset{\circ}{x}) \frac{du_1}{u_1} \text{ и } \text{sign } \overset{\circ}{y} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju_2 \overset{\circ}{x}) \frac{du_2}{u_2}$$

и разлагая функции  $\exp(ju_1 \overset{\circ}{x})$  по  $u_1$ , а  $\exp(ju_2 \overset{\circ}{x})$  по  $u_2$  в ряд Маклорена, получим:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^{k+m}}{k! m!} M\left[\overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{y}^m\right] \beta_{k-1} \beta_{m-1}, \quad (2.68)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^{k-1} du_1 \\ \beta_{m-1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_2^{m-1} du_2 \end{cases}. \quad (2.69)$$

Учитывая, что для чётных  $k$  и  $m$ ,  $\beta_{k-1} = \beta_{m-1} = 0$ , выражение (2.68) можно переписать следующим образом:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(2k+1)! (2m+1)!} \beta_{2k} \beta_{2m} M\left[\overset{\circ}{x}^{2k+1} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right]. \quad (2.70)$$

Из формулы (2.70) видно, что условие (2.63) будет выполнено, если  $M\left[\overset{\circ}{x}^{2k+1} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0$  при  $M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0$ . Это требование выполняется, например, если совместная плотность распределения вероятностей симметрична [48]. При этом,

$$M\left[\text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}\right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{xy} \text{ не зависит от дисперсии входных сигналов } \sigma_x^2 \text{ и } \sigma_y^2.$$

Это обстоятельство особенно важно при построении автоматических коррелометров с аппроксимацией, так как в этом случае отпадает необходимость нормирования исследуемого процесса по среднеквадратическому отклонению.

Определим, при каких ограничениях, накладываемых на исследуемый процесс, будет выполняться условие (2.63), если в качестве функционального преобразователя применить преобразователь с

$$\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \left| \overset{\circ}{x+y} \right| - \left| \overset{\circ}{x-y} \right| = \left(\overset{\circ}{x+y}\right) \text{sign}\left(\overset{\circ}{x+y}\right) - \left(\overset{\circ}{x-y}\right) \text{sign}\left(\overset{\circ}{x-y}\right), \quad (2.71)$$

используемый при анализе корреляционной функций нормальных случайных процессов [70]. Для рассматриваемого функционального преобразователя

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} M\left[\left(\overset{\circ}{x+y}\right) \exp\left[ju\left(\overset{\circ}{x+y}\right)\right]\right] \frac{du}{u} - \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} M\left[\left(\overset{\circ}{x+y}\right) \exp\left[ju\left(\overset{\circ}{x+y}\right)\right]\right] \frac{du}{u}. \quad (2.72)$$

Поступим, как в первом случае и введем прежние обозначения. Тогда выражение (2.72) примет вид:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \beta_{2k} C_{2(k+1)}^{2m+1} M\left[\overset{\circ}{x}^{2(k-m)} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right], \text{ а условие (2.63) бу-}$$

дет выполнено, как и в предыдущем случае, если

$$M\left[\overset{\circ}{x}^{2(k-m)} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0 \text{ при } M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0. \quad (2.73)$$

Для другой важной функции  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{x} \text{sign} \overset{\circ}{y}$ , применяемой при релейном методе оценки корреляционной функции [70], можно показать, что

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \beta_{2m} M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right], \quad (2.74)$$

а условие (2.63) будет выполнено, если

$$M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0 \text{ при } M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0. \quad (2.75)$$

Сопоставляя критерий (2.75) с критериями (2.63) и (2.70), можно отметить, что условие (2.75) менее жесткое. Т.е. возможности применения функционального преоб-

разователя с  $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{x} \text{sign} \overset{\circ}{y}$  для индикации равенства нулю корреляционного момента более реальны.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть  $\overset{\circ}{x}(t) = A \sin \omega t$ , а  $\overset{\circ}{y}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

В этом случае  $\gamma(K_{xy}) = \frac{2}{\pi} \cos \varphi$ , т.е. пропорциональна корреляционному моменту.

2. Если совместный закон распределения  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$  нормальный, то

$$\gamma(K_{xy}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x \rho_{xy}, \quad (2.76)$$

где  $\rho_{xy} = \frac{M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right]}{\sigma_x \sigma_y}$  – коэффициент корреляции.

3. Совместное распределение случайных процессов  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$  описывается характеристической функцией:

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{\exp(-iu_1\sigma_x/\sqrt{2})\exp(-iu_2\sigma_y/\sqrt{2})}{\sqrt{(1-i\sqrt{2}\sigma_x u_1)(1-i\sqrt{2}\sigma_y u_2) + 2\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}u_1u_2}}. \quad (2.77)$$

Такой закон распределения имеет квадрат нормального случайного процесса. В этом случае

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{\sigma_x}{\pi\sqrt{2}}\rho_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jx/2}}{(1-jx)^{3/2}} dx, \quad (2.78)$$

т.е. прямопропорциональна  $\rho_{xy}$ .

4. совместная характеристическая функция случайных процессов  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$  равна:

$$\varphi(u_1, u_2) = \exp \left[ -\frac{1}{2}\sigma_x^2(u_1^2 + 2\rho_{xy}u_1u_2 + u_2^2) - \frac{1}{6}i\sigma_x^3K_a(u_1^3 + 3\rho_{xy}u_1^2u_2 + 3\rho_{xy}u_1u_2^2 + u_2^3) + \frac{1}{24}K_\varepsilon(u_1^4 + 4\rho_{xy}u_1^3u_2 + 6\rho_{xy}u_1^2u_2^2 + 4\rho_{xy}u_1u_2^3 + u_2^4) \right], \quad (2.79)$$

где  $K_a$  - коэффициент асимметрии,  $K_\varepsilon$  - коэффициент эксцесса.

Представим  $\gamma(K_{xy})$  в виде:

$$\gamma(K_{xy}) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi(u_1, u_2)}{\partial u_1} \Big|_{u_1=0} du_2. \quad (2.80)$$

Подставляя в (2.80) выражения для характеристической функции, получим:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{\sigma_x}{\pi} \rho_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iK_a x/2 - K_\varepsilon x^2/6) \exp(-x^2/2 - iK_a x^3/6 + K_\varepsilon x^4/24) dx. \quad (2.81)$$

И снова наблюдается прямопропорциональность от  $\rho_{xy}$ .

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что применение любого из рассмотренных функциональных преобразователей для построения коррелометров с аппроксимацией функциями заданного вида при определенных ограничениях, накладываемых на исследуемый процесс, позволит упростить схему коррелометра, расширить его частотный диапазон. При этом наиболее предпочтителен функциональный преобразователь последнего типа.

### 3. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

#### 3.1. Основные понятия и определения

Одной из сложных задач, которую приходится решать при аппроксимации корреляционных функций, является выбор модели корреляционной функции. Решение этой задачи осуществляется на основе априорной информации о свойствах исследуемого процесса. В тех случаях, когда этих данных недостаточно, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [111]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера [79], согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau), \quad (3.1)$$

где  $\beta_k$  - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau)$  - семейство базисных функций, ортонормированных в интервале  $(0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau)$ .

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Так как ряд сходится в интервале  $(0, \infty)$ , то коэффициенты разложения  $\beta_k$  в соответствии с [111] определяются выражением:

$$\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Хаара, Уолша и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Одной из распространенных систем ортогональных функций, широко применяемых в аппроксимативном корреляционном анализе, являются ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением (см. приложение П.13):

$$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2}. \quad (3.4)$$

Ортогональные функции Лагерра удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (3.5)$$

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (3.1). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели.



Тогда для модели корреляционной функции

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (3.6)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[ K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (3.7)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (3.8)$$

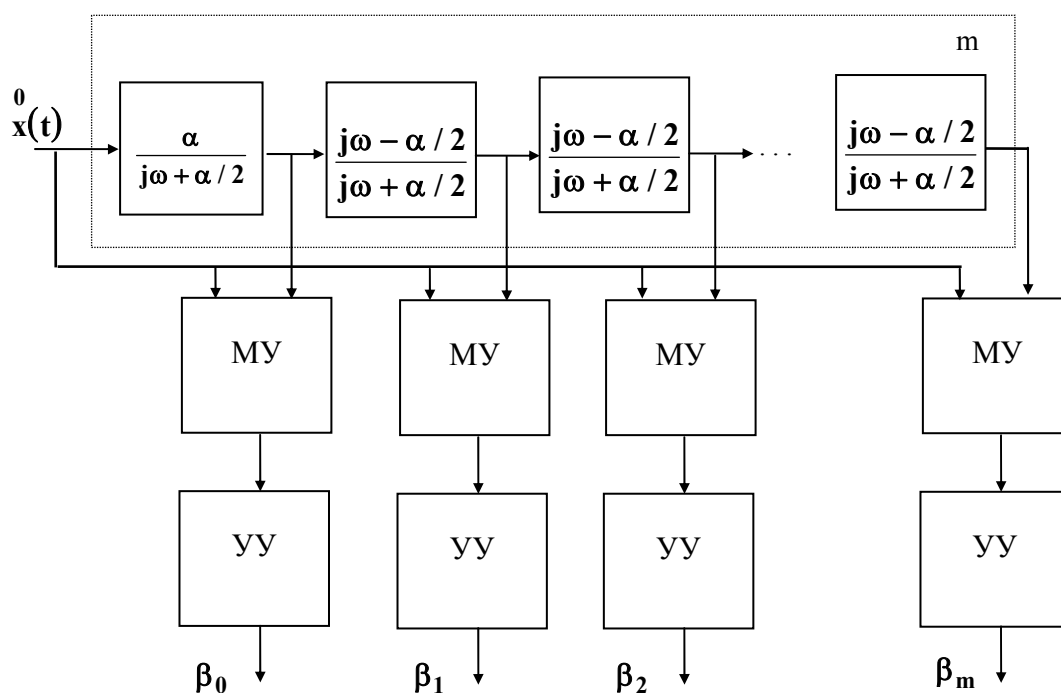


Рисунок 3.1. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Выражения для оценки коэффициентов разложения  $\beta_k$  для типовых моделей нормированных функций приведены в таблице 3.1.

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных функций Лагерра, равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (3.9)$$

Из результатов, представленных в таблице 3.1, и выражений (3.8) и (3.9) видно, что значения погрешности аппроксимации  $\Delta$  и коэффициентов разложения  $\beta_k$  зависят от численного значения параметра  $\alpha$ .

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации

Коэффициенты разложения  $\beta_k$  для типовых моделей

Таблица 3.1

№	$\rho_x(\tau)$	$\beta_k$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \lambda \tau )$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left\{ \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \times \frac{2\lambda + \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - \frac{k\alpha\lambda}{(\lambda + \alpha/2)^2} \right\}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	$\frac{\alpha^2 / 2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left[ \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right) + \frac{2k\lambda}{(\lambda + \alpha/2)} \right]$
4	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k$
5	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{\alpha}{2j\omega_0} \left\{ \frac{\lambda + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k + \frac{\lambda - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k \right\}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{\alpha}{2j\omega_0} \left\{ \frac{\lambda + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k + \frac{\lambda - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k \right\}$