

$$F_x(x_j, a, b) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x_j < a) \\ \frac{2(x_j - a)^2}{(b - a)^2}, & \left(a < x_j < \frac{a + b}{2}\right) \\ 1 - \frac{2(b - x_j)^2}{(b - a)^2}, & \left(\frac{a + b}{2} < x_j < b\right) \\ 1, & (b < x_j < \infty) \end{cases}.$$

Найдем все необходимые для расчетов частные первые, вторые и смешанные производные функции $F_x(x)$.

а) $(a < x < (a+b)/2)$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(x_j - a)}{(b - a)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -\frac{4(x_j - a)^2}{(b - a)^3},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4} - \frac{16(x_j - a)}{(b - a)^3} + \frac{4}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = \frac{8(x_j - a)}{(b - a)^3} - \frac{12(x_j - a)^2}{(b - a)^4}.$$

б) $((a+b)/2 < x < b)$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{4(b - x_j)^2}{(b - a)^3} - \frac{4(b - x_j)}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = -\frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{16(b - x_j)}{(b - a)^3} - \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{4}{(b - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = \frac{12(b - x_j)^2}{(b - a)^4} - \frac{8(b - x_j)}{(b - a)^3}.$$

Полученные выражения необходимо подставить в выражения (1.49)-(1.52) и рассчитать частные производные дифференциальных функций F_1 и F_2 , которые используются в вычислениях неизвестных параметров путем последовательного приближения итерационных формул (1.34) и (1.35).

Аналогично рассчитываются параметры аналитических моделей и для других типовых законов распределения (см. приложения 8-9).

Ниже приведены результаты определения параметров функции распределения Симпсона.

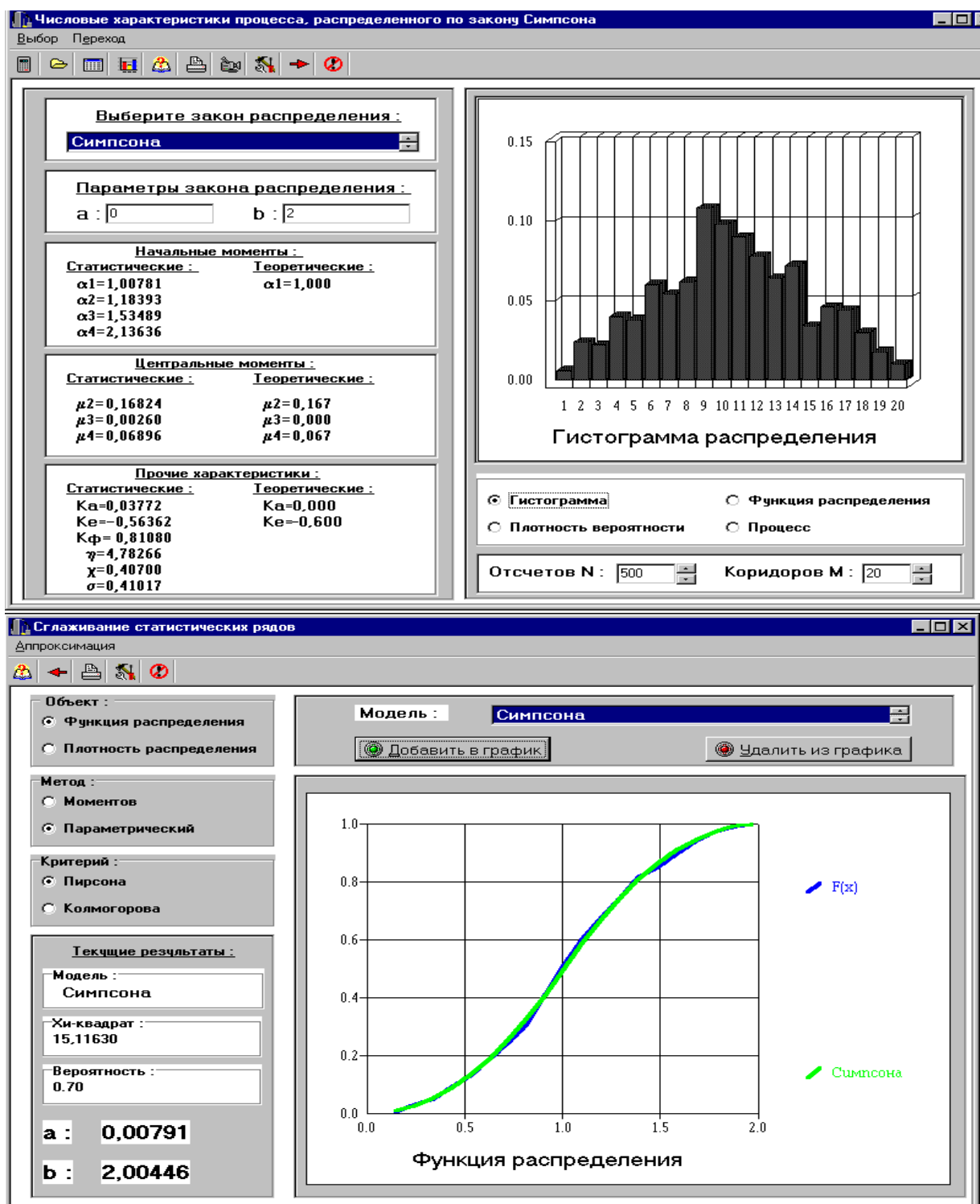


Рисунок 1.14. Результаты аппроксимации

Сравнительный анализ методов аппроксимации законов распределения отдает предпочтение методу аппроксимации функций распределения, особенно при малой выборке.

1.7. АИС для аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов

Методы, рассмотренные в разделах 1.4-1.6, легли в основу АИС, предназначенной для определения аналитического выражения закона распределения исследуемого случайного процесса.

АИС состоит из комплекса технических средств, пакета прикладных программ, интерфейса пользователя, математического и методического обеспечения [72, 103]. Для удобства использования в учебном процессе в систему включен блок генерирования случайных процессов с заданными законами распределения вероятностей.

Технические требования, предъявляемые к системе состоят в следующем:

- программные требования - Microsoft Windows 95-98;
- аппаратные требования - процессор Pentium 100 МГц, ОЗУ 16 Мб, на жестком диске 15 Мб.

1.7.1. Описание подсистем

Разработка структуры пакета программ велась в соответствии с приведенной схемой, представленной на рис. 1.15. Учитывая большое разнообразие законов распределения, основным требованием, предъявляемым к структуре пакета программ, является открытость, то есть возможность добавления в программу новых методов аппроксимации и законов распределения без изменения структуры программы. В соответствии с этим требованием пакет программ системы разбит на четыре блока, обмен между которыми осуществляется в виде передачи данных (см. рис. 1.16):

- получения статистических данных;
- оценки статистических данных;
- аппроксимации;
- оценки качества аппроксимации.

Блок получения статистических данных делится, в свою очередь, на три части:

- генерация случайного процесса с заданным видом закона распределения;
- ввод выборки из N отсчетов случайного процесса из выбранного файла;
- ввод частот попадания в дифференциальные коридоры отсчетов случайного процесса из выбранного файла.

В первом случае данные генерируются в самой программе, во втором - возникают как результат эксперимента или генерируются в другой программе и передаются в систему. Данные, получаемые в первом блоке, передаются в блок оценки статистических характеристик вместе со способом получения информации. В первом и втором случае передается массив отсчетов случайного процесса, в третьем - частоты попадания в дифференциальные коридоры. В первом случае вводится также число дифференциальных коридоров и передается номер закона распределения, по которому сгенерирован случайный процесс.

Блок оценки статистических характеристик состоит из шести частей: оценки числовых характеристик случайного процесса; расчета и построения плотности распределения вероятностей; функции распределения, гистограммы; фазового портрета и графика случайного процесса.



Рисунок 1.15. Пакет программ генерирования и аппроксимации законов распределения случайных процессов

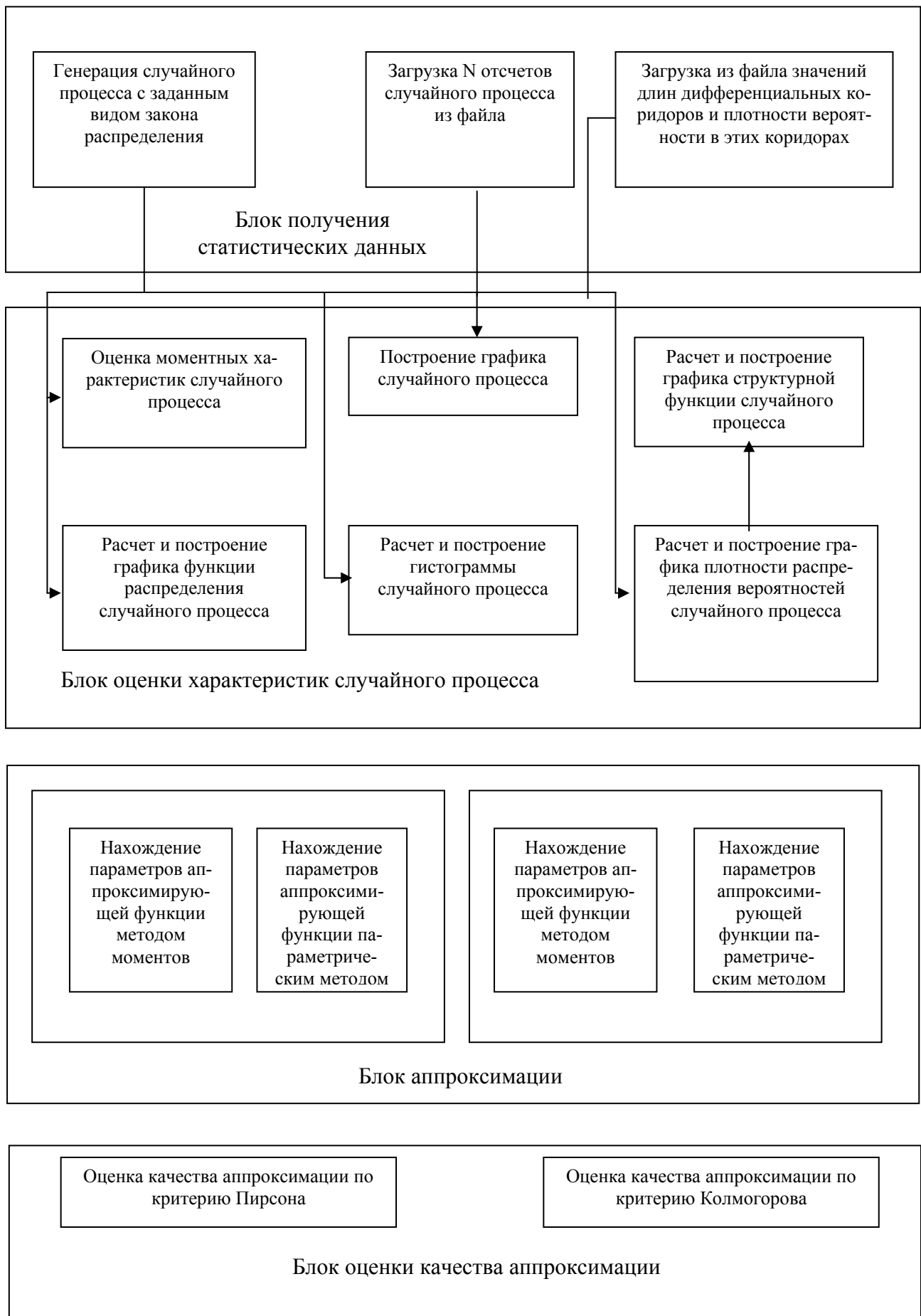


Рисунок 1.16. Блоки пакета прикладных программ и их взаимодействие

Данные в этот блок попадают из блока получения статистических данных. В первом и втором случае на основе отсчетов случайного процесса рисуется график процесса, определяются частоты попадания в дифференциальные коридоры, и формируется гистограмма, оцениваются числовые характеристики случайного процесса. Данные о частотах попадания в дифференциальные коридоры передаются в блоки формирования функции распределения и плотности распределения вероятности. Значения плотности распределения вероятности передаются в блок формирования фазового портрета случайного процесса.

Блок аппроксимации состоит из четырех частей: аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения по методу моментов, аппроксимации плотности распределения вероятностей и функций распределения параметрическим методом.

В блок аппроксимации передаются из блока получения статистических данных число дифференциальных коридоров и номер закона распределения, а из блока оценки статистических характеристик - значения плотности распределения вероятностей и значения функции распределения, значения математического ожидания и дисперсии. Математическое ожидание и дисперсия используется в методе моментов, значение плотности вероятности и функции распределения используется в параметрическом методе.

Используя переданные значения и выбранный для аппроксимации закон распределения, в данном блоке вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующего закона.

Блок оценки качества аппроксимации состоит из двух частей:

- оценки по критерию Пирсона;
- оценки по критерию Колмогорова.

В блок оценки качества аппроксимации передаются:

- из блока получения статистических данных - значения частот попадания в дифференциальные коридоры, число отсчетов случайного процесса, число дифференциальных коридоров;
- из блока оценки статистических характеристик - значения функции распределения;
- из блока аппроксимации - значения неизвестных параметров аппроксимирующего закона распределения.

Благодаря такому блочному построению структуры программы можно добавлять новые возможности, не видоизменяя ее принципиально. Например, можно изменить способы задания статистических данных, с которыми работает система, добавить новые законы распределения, по которым будет генерироваться случайный процесс, задать другие статистические характеристики случайного процесса, которые оцениваются в программе, изменить методы их расчетов, добавлять новые или изменять старые методы аппроксимации и т.д. Трудоемкость таких изменений будет определяться только сложностью программной реализации самих изменений, а не перестройкой структуры системы.

1.7.2. Описание интерфейса системы

Основу интерфейса системы составляют две основные экранные формы, с которыми работает пользователь:

- экранная форма задания случайного процесса и оценивания его характеристик;
- экранная форма аппроксимации случайных процессов и оценки качества аппроксимации.

Первая форма, показанная на рис. 1.17, представляет из себя панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы:

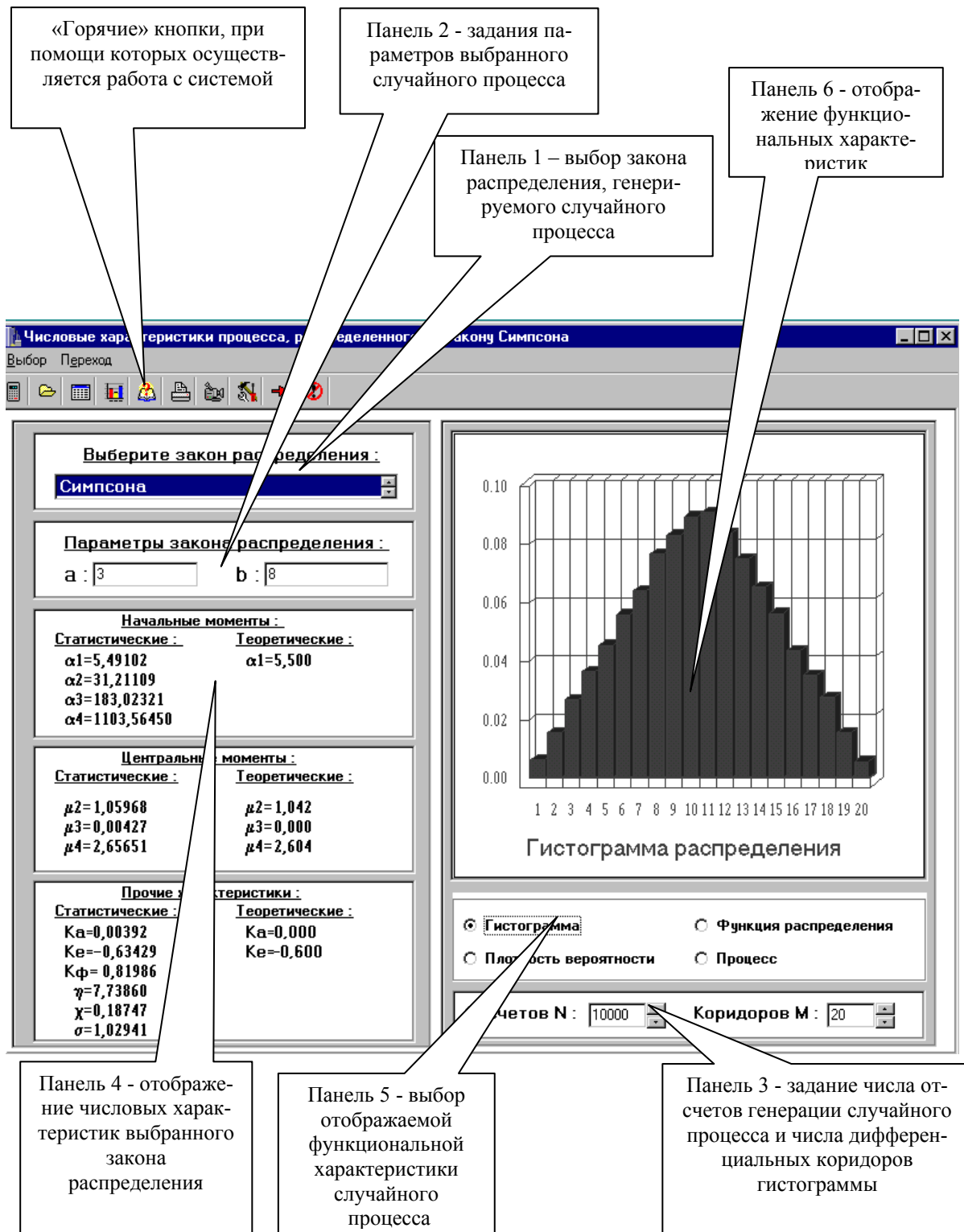


Рисунок 1.17. Интерфейс экранной формы генерирования и оценки статистических характеристик случайного процесса

- панель «горячих» клавиш, с помощью которой осуществляется управление работой системы;
- панель 1 – выбор закона распределения для генерации процесса, в случае его программного задания;
- панель 2 появляется после выбора закона распределения и позволяет задать значение одного или (в зависимости от закона) двух параметров данного закона распределения;
- панель 3 позволяет указать число отсчетов программно-генерируемого случайного процесса, а также число дифференциальных коридоров для расчета гистограммы;
- панель 4 служит для отображения вычисленных числовых характеристик сгенерированного с заданным видом закона распределения случайного процесса;
- панель 5 позволяет выбрать вид отображаемой функциональной характеристики случайного процесса или сам график процесса;
- панель 6 отображает одну из трех функциональных характеристик случайного процесса: гистограмму, плотность распределения вероятностей или функцию распределения.

На рис. 1.18 более подробно показана панель «горячих» кнопок. Она состоит из следующих кнопок:

- расчетов – генерирует случайный процесс с заданным видом закона распределения и параметром;
- загрузки из файла – требует указать файл и вызывает для работы экранную форму приема статистических данных, эта экранная форма показана на рис. 3.3;
- отображения расчетов – считает и отображает числовые характеристики случайного процесса;
- отображения функциональных характеристик – рассчитывает и показывает на панели 6 выбранную на панели 5 функциональную характеристику случайного процесса;
- справки – вызывает справочную систему, содержащую основные сведения об основных видах законов распределения;
- печати – позволяет вызвать стандартный диалог печати под Windows;
- настройки принтера – вызывается стандартное окно настройки параметров принтера;
- перехода к экранной форме структурной функции – при нажатии вызывается экранная форма, отображающая структурную функцию случайного процесса, экранная форма структурной функции показана на рис. 1.22;
- перехода к экранной форме аппроксимации случайного процесса;
- выхода из программы.

На рис. 1.19 показана экранная форма загрузки данных из файла.

На панели 1 выбирается вид данных: отсчеты случайного процесса или частоты попадания в дифференциальные коридоры. В том случае, если выбраны отсчеты на панели 2, задается их число. В случае выбора частот на панели 3 следует указать число дифференциальных коридоров, а также минимальную и максимальную границу диапазона.

После этого, по нажатию кнопки 1, происходит чтение данных из указанного перед этим файла.

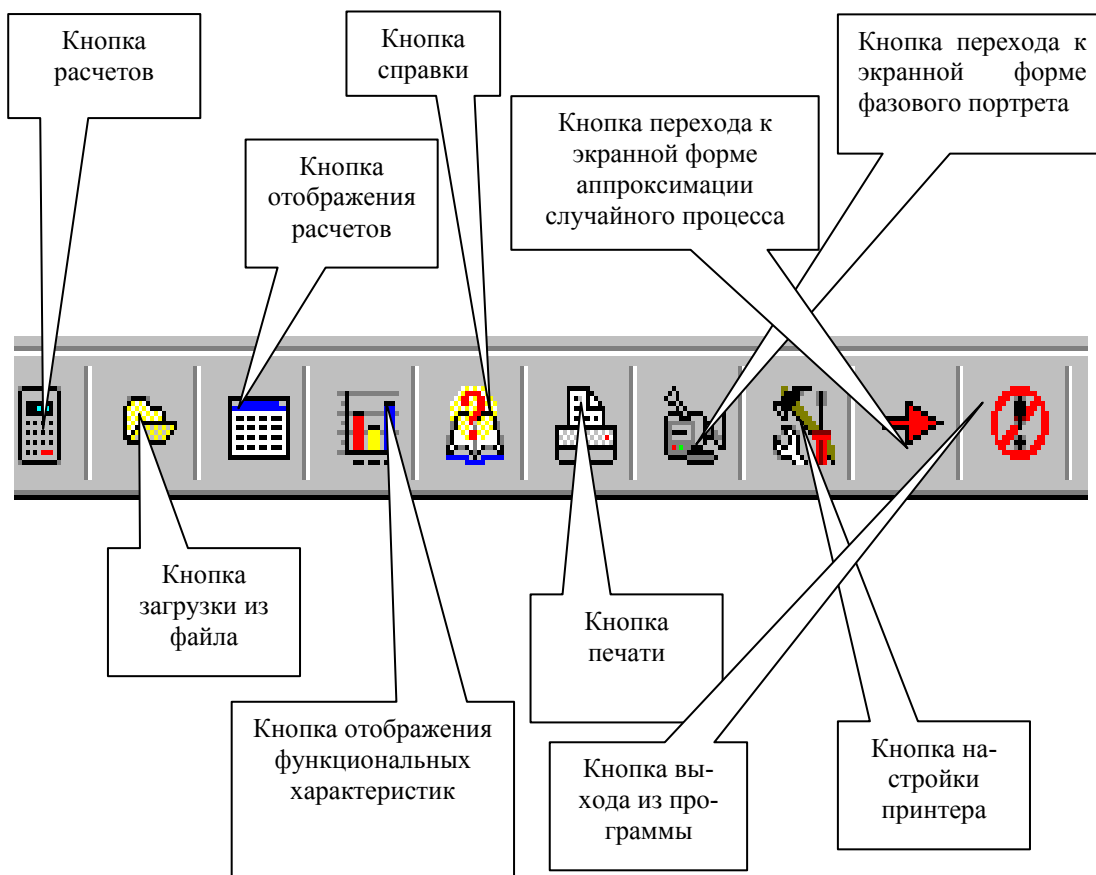


Рисунок 1.18. Панель «горячих» кнопок

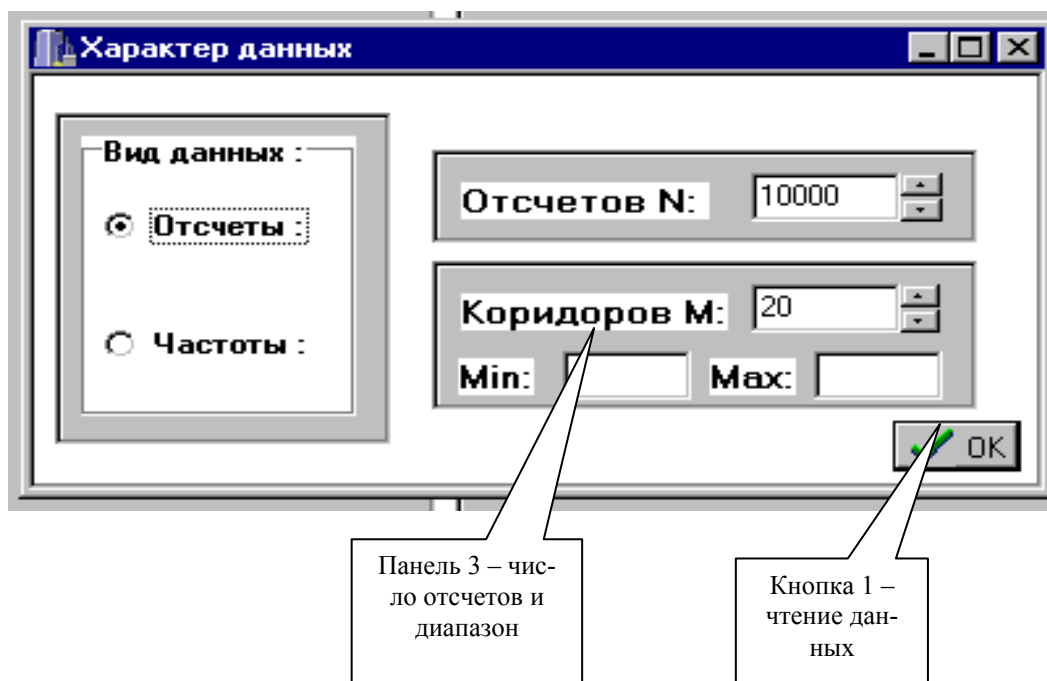


Рисунок 1.19. Экранная форма загрузки данных из файла

На рис. 1.21 показана экранная форма отображения графика случайного процесса. Она появляется на экране после выбора кнопки с названием «Процесс» на панели 5 основной экранной формы. На экранной форме отображения графика присут-

ствуют панель «горячих» кнопок, панель отображения графика и панель задания числа отсчетов. На панели «горячих» кнопок (рис. 1.20) четыре кнопки: настройки принтера, печати формы, возвращения на основную экранную форму и отображения графика, которая перерисовывает график после изменения числа отображаемых отсчетов случайного процесса. Число отсчетов задается на панели 2. На панели 3 отображается график случайного процесса.

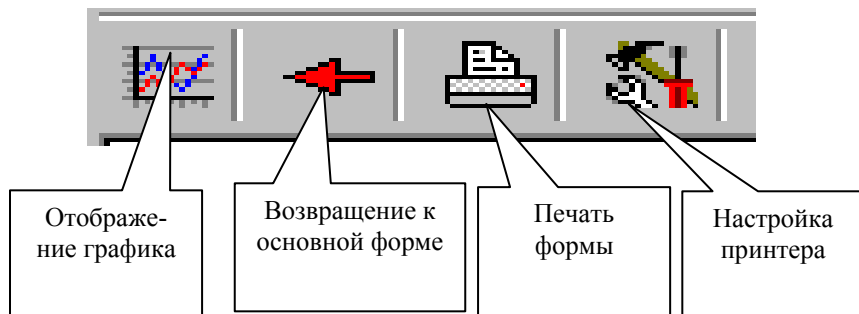


Рисунок 1.20. Панель «горячих» кнопок экранной формы отображения случайного процесса

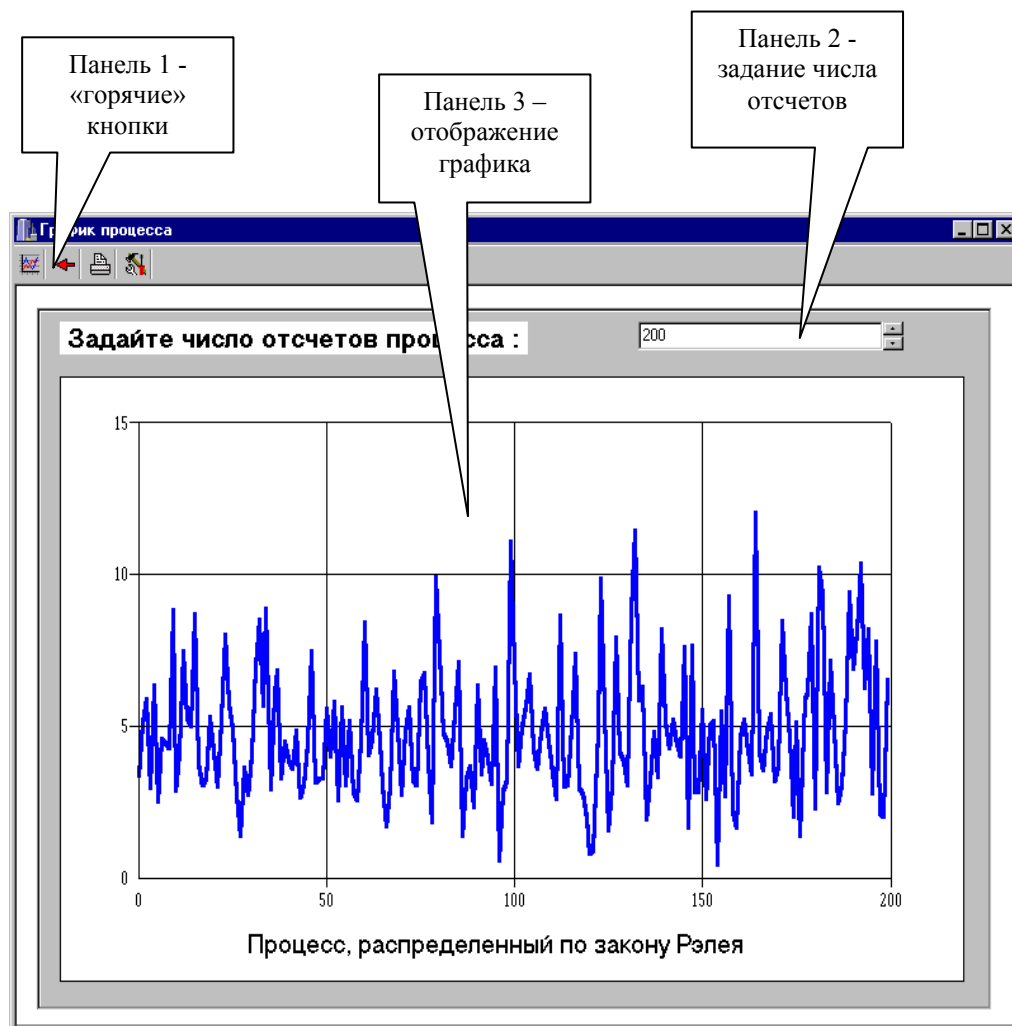


Рисунок 1.21. Экранная форма отображения случайного процесса

На рис. 1.22 показана экранная форма расчета и отображения структурной функции. На этой форме присутствуют панель «горячих» кнопок и панель отображения графика структурной функции. На панели «горячих» кнопок есть три кнопки: по-

строения структурной функции, возвращения на основную экранную форму и вызова справки.

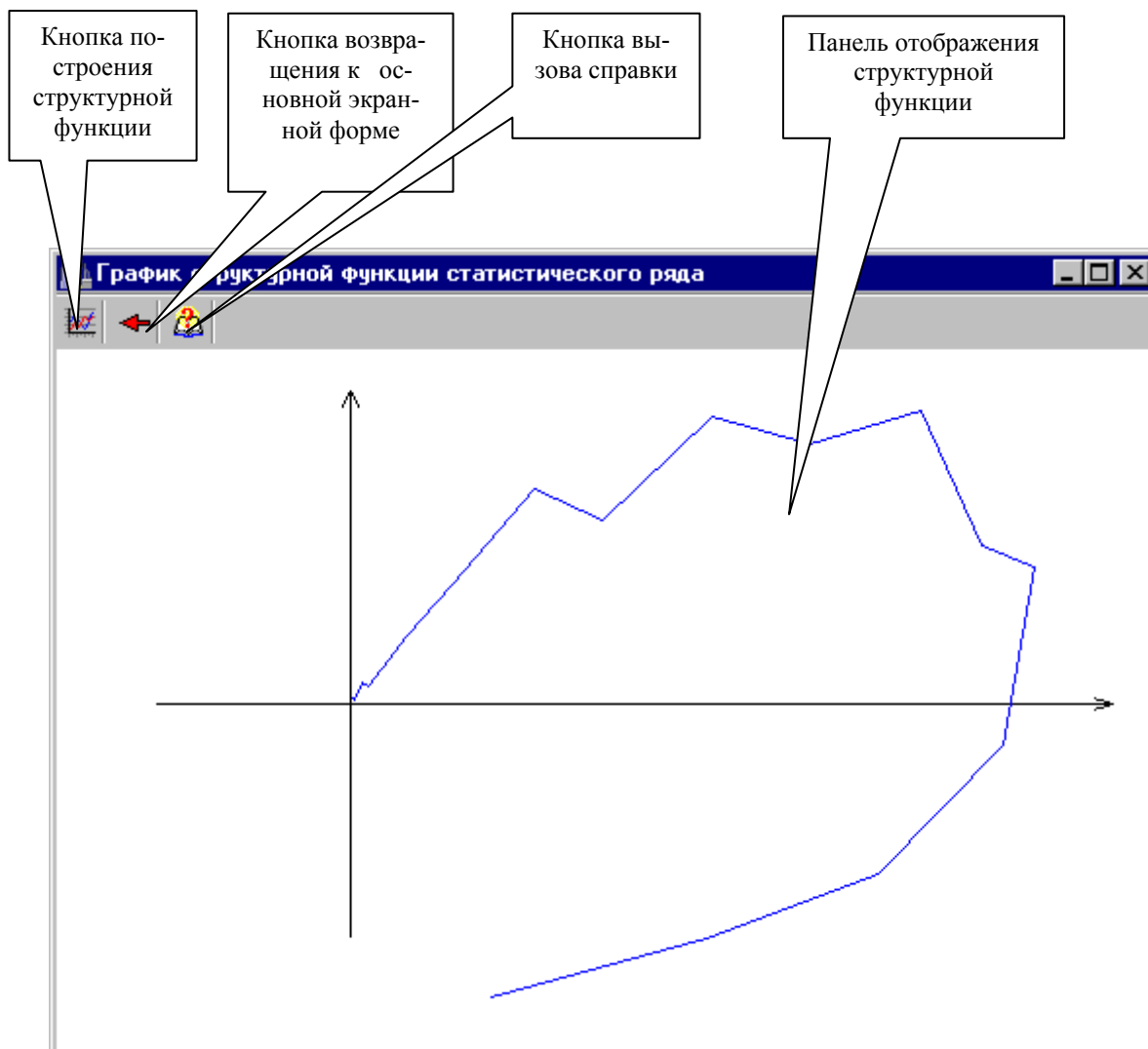


Рисунок 1.22. Экранная форма расчета и отображения структурной функции случайного процесса

Вторая экранная форма предназначена для реализации блока аппроксимации. Сама форма, показанная на рис. 1.23, представляет собой панель, содержащую элементы ввода и отображение информации, а также «горячие» клавиши, позволяющие реализовывать различные функции системы. На рис. 1.24-1.26 представлены укрупненные изображения используемых инструментов.

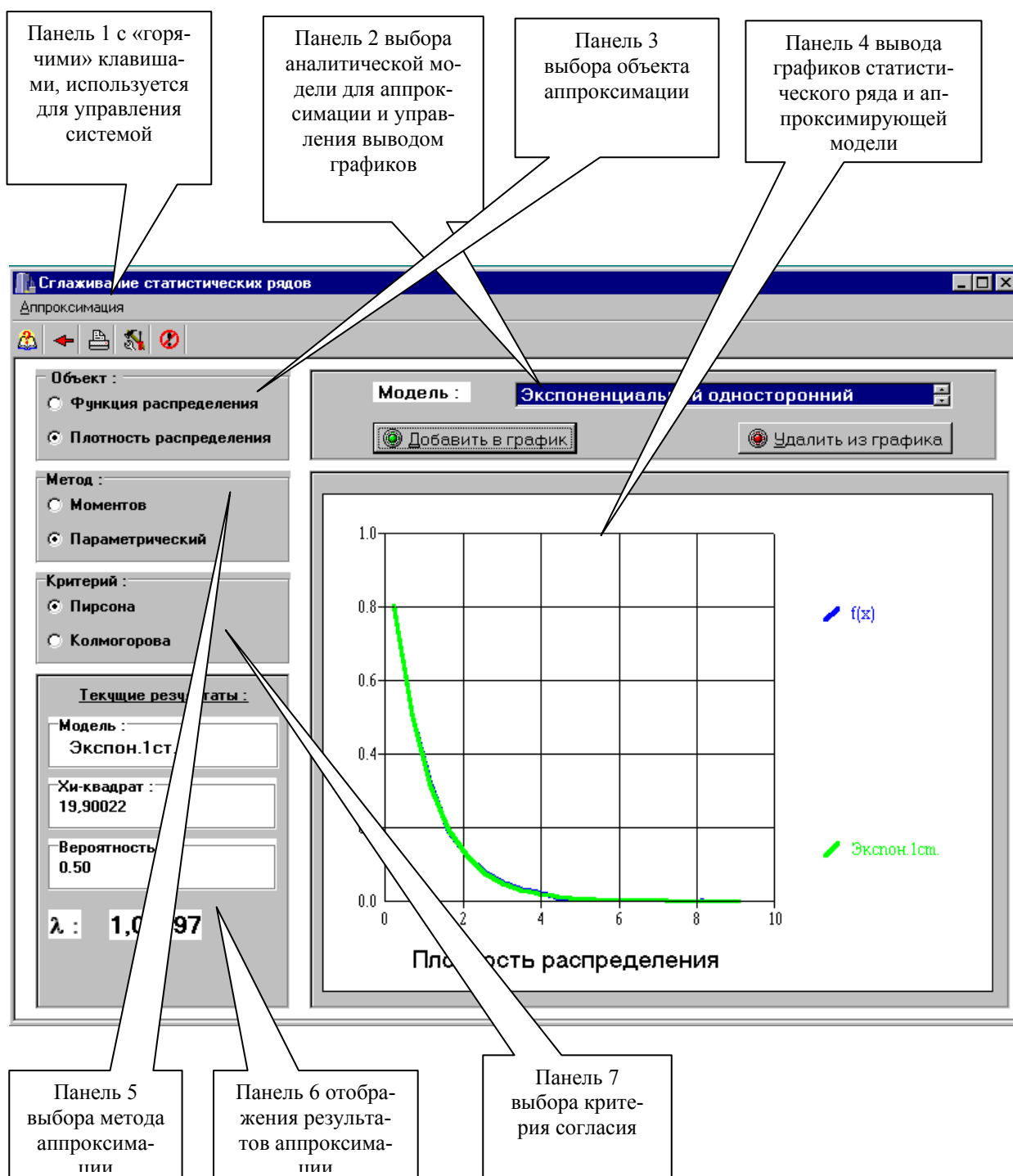


Рисунок 1.23. Общий вид формы блока аппроксимации

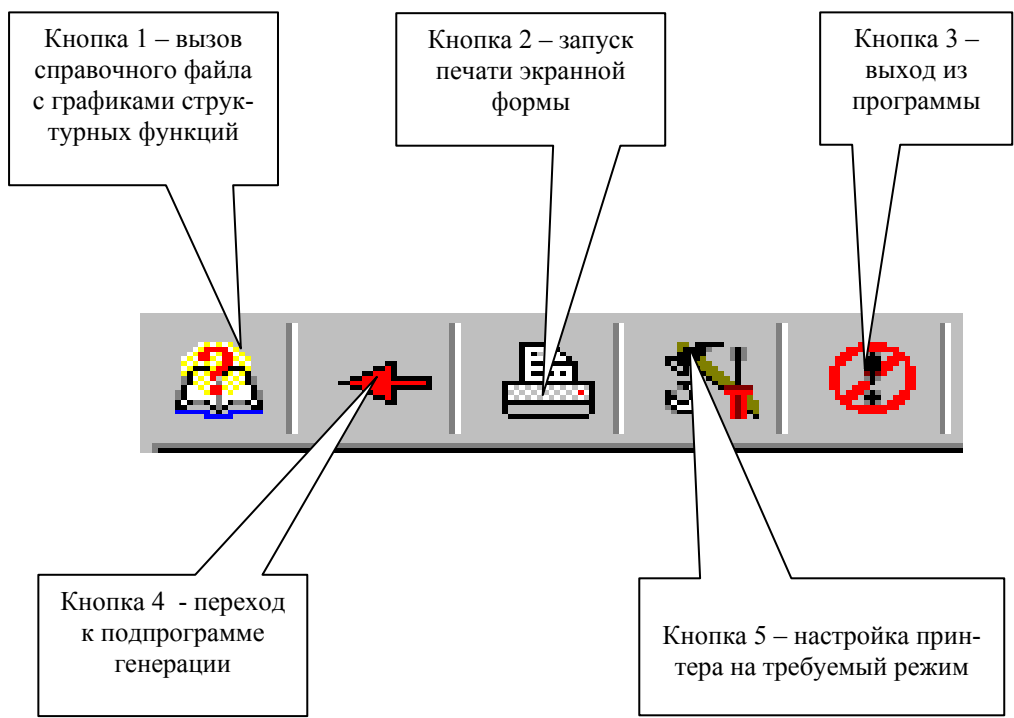


Рисунок 1.24. Панель инструментов

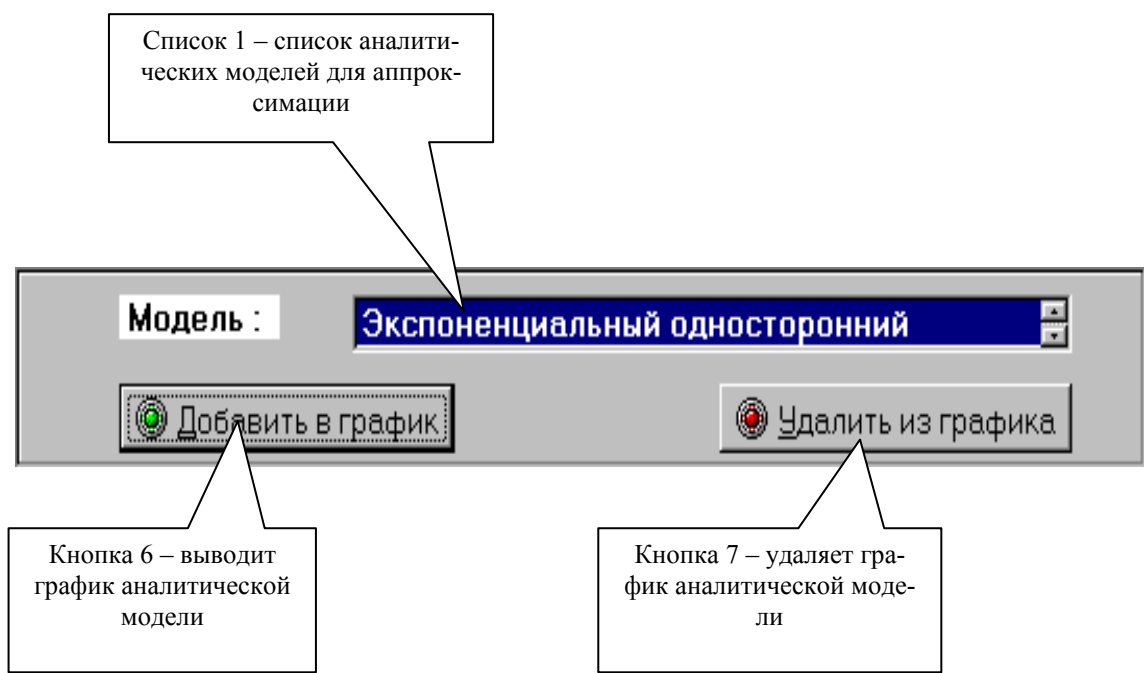


Рисунок 1.25. Панель выбора аналитической модели

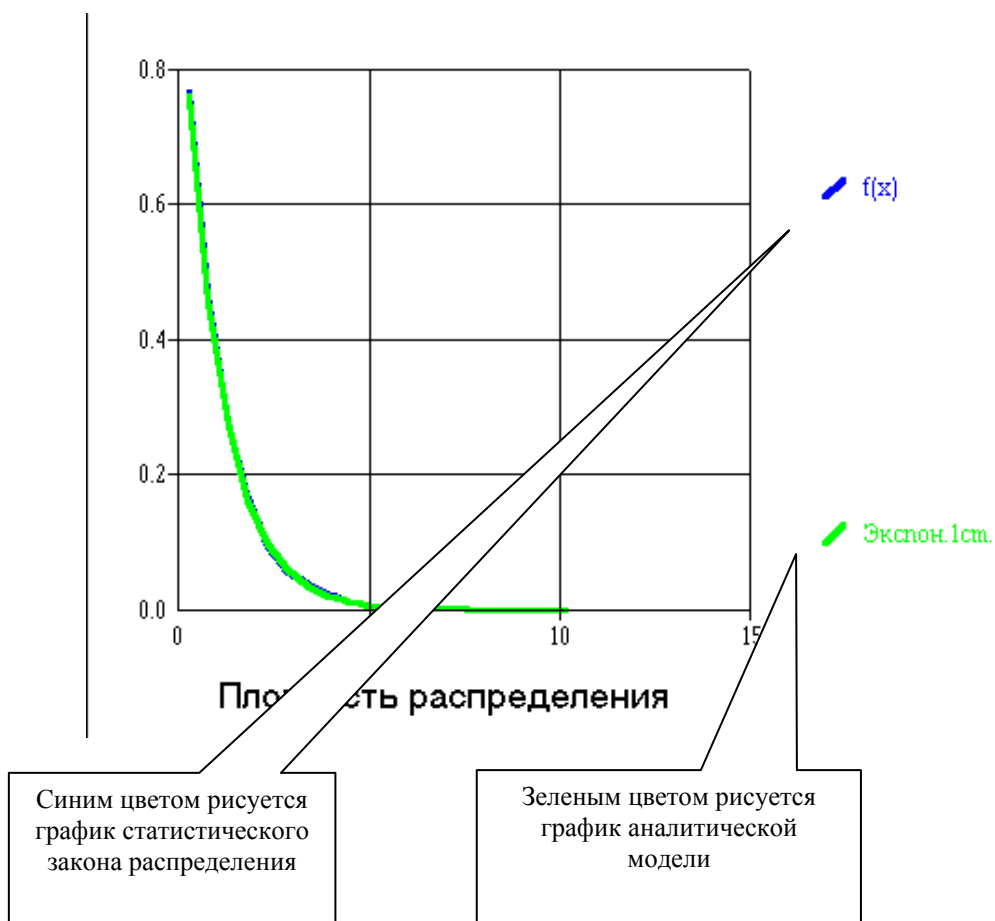
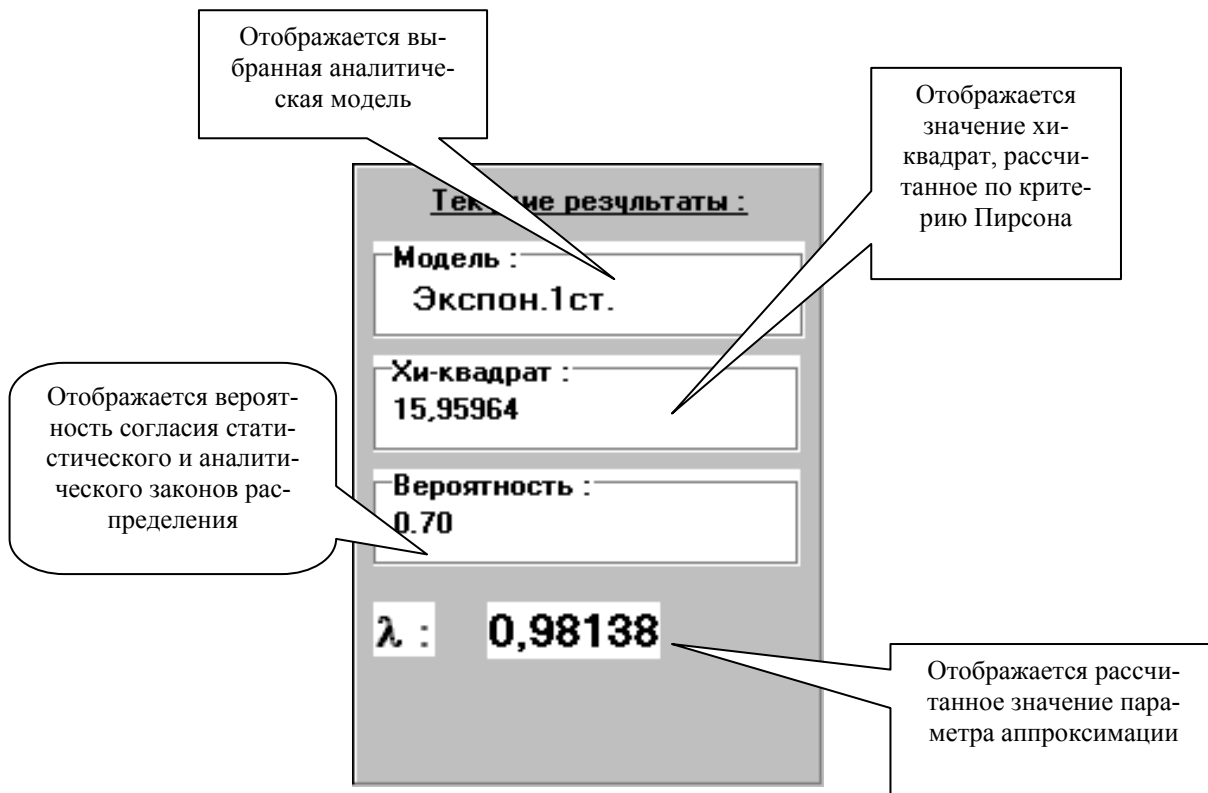


Рисунок 1.26. Панели вывода результатов

1.7.3. Порядок работы с системой

После загрузки основной экранной формы следует решить, будет ли проведена генерация процесса в самой системе, или будут загружены данные извне. В первом случае на панели 1 основной экранной формы следует выбрать закон распределения из списка законов, с которым будет сгенерирован данный процесс (см. рис. 1.17). На экранной форме появится панель 2, на которой, в зависимости от закона, следует задать значения одного или двух параметров. На панели 3 нужно задать значения числа отсчетов генерируемого процесса и числа дифференциальных коридоров. После нажатия на кнопку расчетов панели «горячих» кнопок основной экранной формы будет произведен расчет N отсчетов процесса.

Для экспорта данных в программу следует нажать кнопку загрузки из файла на основной экранной форме. Пользователю будет предложено указать загружаемый файл в стандартном диалоговом окне Windows. После указания файла появится экранная форма загрузки данных из файла, в которой следует указать тип передаваемых данных.

На первом этапе задаются данные процесса. На втором этапе оцениваются различные характеристики этого процесса. При нажатии на кнопку отображения расчетов на экране появляются числовые характеристики случайного процесса. На панели 5 нажатием кнопки можно выбрать график одной из трех функциональных характеристик или график самого процесса.

При нажатии на кнопку отображения фазового портрета, загружается экранная форма, позволяющая рассчитать и построить график (см. рис. 1.22).

В начале работы с экранной формой аппроксимации случайного процесса пользователь уже должен иметь гипотезу о виде закона распределения исследуемого процесса. Этот гипотетический закон распределения выбирается из общего списка законов распределения на панели 2 (см. рис. 1.23).

После чего, на панели 3 следует выбрать ту функциональную характеристику случайного процесса, по которой будет проводиться аппроксимация: функцию распределения или плотность распределения вероятностей. Выбранная функциональная характеристика графически отображается на панели 4.

На панели 5 выбирается метод нахождения неизвестных параметров теоретического закона распределения:

- метод моментов;
- параметрический метод.

Указав на панели 7 метод оценки качества аппроксимации, следует нажать кнопку 6 на панели 2. По нажатию этой кнопки происходит нахождение неизвестных параметров теоретического закона распределения, и результаты отображаются на панелях 4 и 6.

На панели 4 рисуется выбранная функциональная характеристика теоретического закона распределения, а на панели 6 показывается рассчитанное значение χ^2 (критерий Пирсона) или λ (критерий Колмогорова) и значение вероятности того, что расхождение между статистическим и теоретическим законами распределения можно объяснить случайными причинами.

Если вычисленное значение вероятности не удовлетворяет пользователя, то, нажав кнопку 7, он может убрать график функциональной характеристики теоретического закона распределения с панели 4 и повторить результаты расчёта.

Для примера, на рис. 1.27 приведены результаты определения параметров распределения закона Вейбулла.

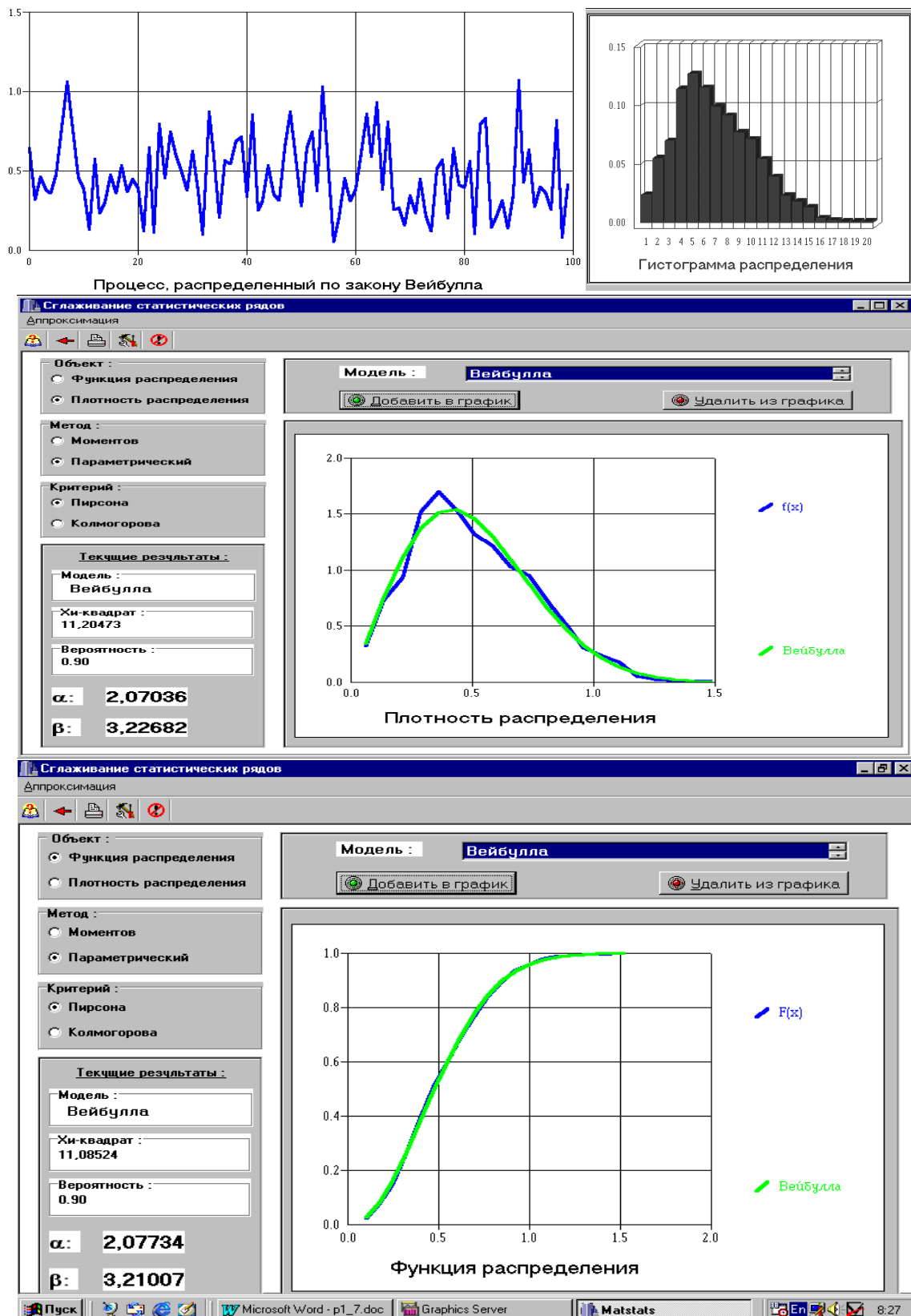


Рисунок 1.27. Результаты определения параметров закона распределения Вейбулла

1.8. Сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации законов распределения

С целью повышения эффективности научных исследований, особенно при исследовании новых объектов, возникает необходимость в разработке и исследовании **алгоритмов** оценки вектора неизвестных параметров - $\bar{\Theta} = A_{\Theta} \{ \epsilon(t_k) \}$, а также в исследовании случайных процессов и временных рядов.

Следует отметить, что исследование алгоритмов возможно как аналитическими методами, так и методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Как правило, реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
 - под воздействием внешних факторов;
 - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
 - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
 - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
 - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
 - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
 - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков представлена на рис. 1.28.

Затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике, изложенной в РТМ 25139-74 [78], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки $\hat{\Theta}$:

$$\Delta = \max \left\{ \left| \Delta_j \right| \right\} j = 1, \dots, N, \quad (1.53)$$

где N - число испытаний, зависящее от доверительной информации P_d . Так, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных огра-

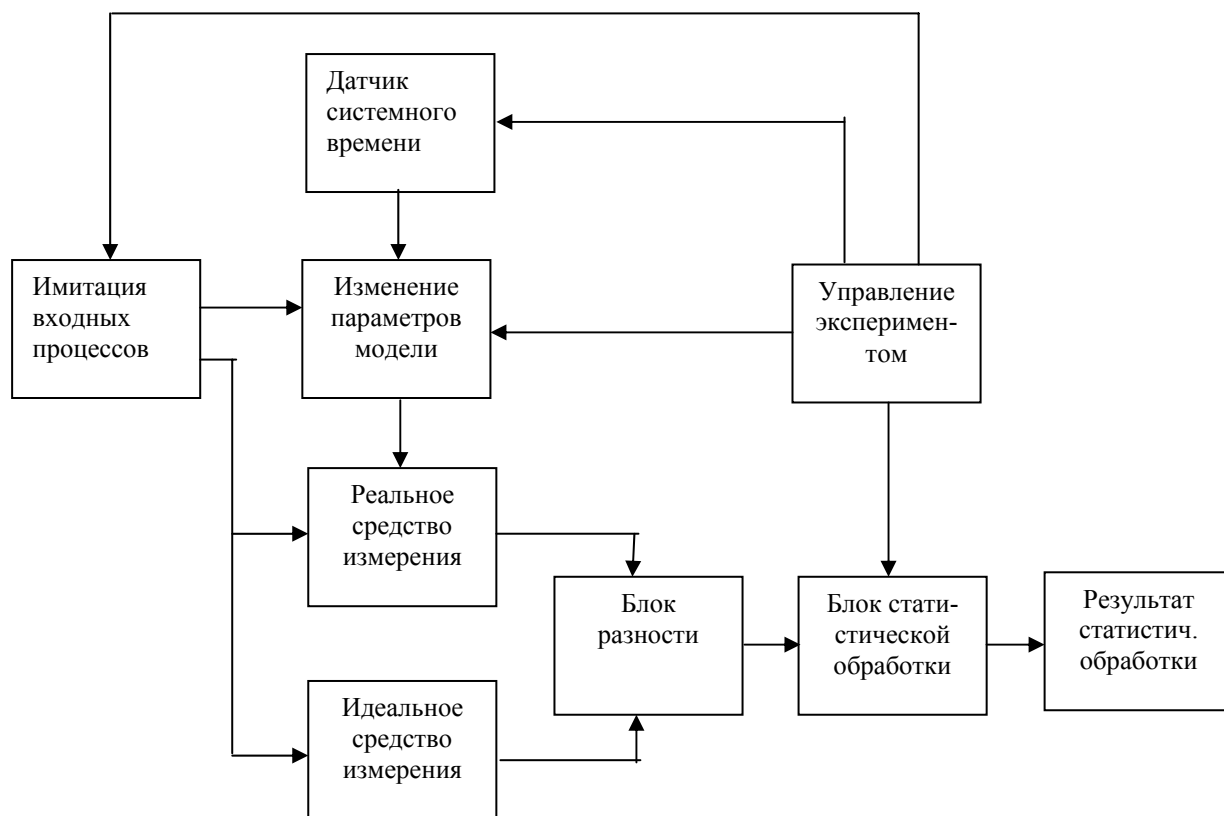


Рисунок 1.28. Функциональная схема имитационного моделирования

ничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкретных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:

- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

Воспользовавшись разработанной системой, приведем результаты сравнительного анализа алгоритмов аппроксимации законов распределения для временного ряда, распределенного по экспоненциальному закону $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda = 1$, широко применяемого на практике при расчёте параметров АСНИ, исследовании вероятностных характеристик неэквидистантных временных рядов. Параметры алгоритмов выбраны в соответствии с рекомендациями подразделов 1.1, 1.4-1.6.

Значения параметра экспоненциального закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500$, $M=10$ приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	0,9603	5,5439	1,00579	8,51	0,9674	5,798
2	0,98	6,1867	0,9307	6,4984	0,9582	6,0585
3	0,9446	16,2528	1,0176	22,636	0,9602	17,0424
4	0,9804	1,7875	0,9737	1,8577	0,984	1,7663
5	1,0165	5,2636	1,0799	7,6052	1,0283	5,4085
6	0,9473	13,545	0,9101	12,5885	0,9189	12,6992
7	0,9549	5,7752	0,9339	5,6472	0,9522	5,7334
8	1,0333	10,256	1,0605	11,4268	1,0195	9,9176
9	0,9788	6,7865	1,0062	7,5619	0,9664	6,6783
10	0,9699	8,646	0,9677	8,5363	0,9574	8,1046
11	1,0022	13,856	1,1132	24,6434	1,0091	14,1086
12	1,0516	5,3593	1,0153	4,5777	1,0273	4,7372
13	1,0274	6,314	1,0169	6,1396	1,0183	6,1564
14	1,0496	3,8448	1,0182	3,8185	1,0314	3,735
15	0,9409	7,1225	0,9537	7,3787	0,9345	7,0582
16	1,0549	11,7544	1,1391	18,9582	1,0871	13,4777
17	0,9992	1,7917	1,0515	2,6638	1,0717	1,7661
18	0,9645	7,985	0,9191	7,3457	0,9452	7,4891
19	1,0815	11,7833	1,1122	13,5319	1,0499	10,7825
20	1,0486	9,4825	1,0185	8,8276	1,0401	9,2218
21	0,9689	9,773	1,0246	13,3076	0,9892	10,614
22	0,9844	5,1709	0,9752	5,1367	0,9816	5,1523
23	0,9728	7,0216	0,9655	6,9621	0,965	6,9599
24	1,068	12,3235	1,0462	12,1296	1,0634	12,2956
25	0,9822	6,0582	0,9514	6,1036	0,9728	5,9853
26	0,9432	4,9787	0,8908	5,9352	0,9258	5,0102
27	0,9859	5,7124	1,0979	11,5524	1,0068	5,8126
28	0,9841	12,5944	0,9567	11,6159	0,9798	12,3894
29	0,9461	9,4224	0,9359	9,112	0,9265	8,9192
m_λ	0,9939		1,0030		0,9910	
σ_λ^2	0,0017		0,0043		0,0021	
σ_λ	0,0414		0,0657		0,0460	
		8		9		12

Выделенные значения параметров соответствуют минимальному значению χ^2 в строке, т. е. лучшему методу аппроксимации из рассмотренных. В последней строке указано количество случаев, когда данный метод аппроксимации даёт лучший результат.

Значения параметра экспоненциального закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500$, $M=18$ приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0127	30,0388	0,9946	28,9604	0,9965	29,0616
2	1,008	24,8421	1,0957	37,7176	1,0217	26,0049
3	0,9825	16,2121	0,9689	15,8397	0,9782	16,0742
4	1,0008	18,543	1,1115	28,725	1,0131	18,9419
5	0,95667	16,8424	0,9215	16,8512	0,9659	17,0691
6	1,0214	17,9857	1,0695	21,1378	1,0015	17,3084
7	0,9768	18,3176	1,0779	30,7334	0,9876	18,9646
8	1,0187	11,0238	1,023	11,174	1,0287	11,3927
9	1,0286	7,9664	1,0243	7,8573	1,0273	7,9298
10	1,0343	19,6174	1,1143	29,8176	1,0478	20,6982
11	1,0048	16,1095	0,9738	15,4993	0,9887	15,6505
12	0,9954	30,0012	0,9396	28,1424	0,9644	28,6237
13	0,9777	15,3788	1,0287	18,6061	0,994	16,0764
14	0,971	25,3711	0,923	25,1372	0,9535	25,0218
15	0,9796	7,0792	0,9939	7,2193	0,9823	7,0892
16	0,9894	14,4784	1,0094	15,642	0,9979	14,9114
17	1,0449	16,6996	1,0234	16,0457	1,0443	16,6733
18	1,042	14,364	0,96	16,1122	1,028	14,2795
19	0,9905	16,3258	1,1159	36,4491	1,0199	18,6467
20	0,9762	19,8329	0,9686	19,3503	0,9666	19,2287
21	1,0006	12,3535	1,0302	13,6947	1,0037	12,447
22	0,942	24,4423	0,9593	25,5634	0,9294	23,8492
23	1,0995	19,2909	1,0972	19,2077	1,1072	19,5999
24	1,0498	10,4912	1,0771	11,503	1,0515	10,533
25	0,9901	16,0817	1,0174	17,5145	0,9881	16,0096
26	1,0066	15,7954	1,0605	19,7859	1,0267	16,8713
27	1,0285	16,8928	1,0533	17,9404	1,018	16,6184
28	0,9446	10,2616	0,9222	10,2748	0,9457	10,2748
29	0,9622	24,9265	1,0032	30,1757	0,9708	25,8216
m_λ	1,0012		1,0192		1,0017	
σ_λ^2	0,0012		0,0036		0,0014	
σ_λ	0,0345		0,0603		0,0371	
		15		7		7

Значения параметра экспоненциального закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=10$ приведены в таблице 1.7.

Таблица 1.7

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0260	6,0544	1,0845	10,129	1,0365	6,2926
2	0,9942	3,9715	0,9692	3,776	0,9844	3,7655
3	1,0367	5,3788	1,0187	5,4418	1,0311	5,3409
4	0,9783	5,9228	0,9466	5,1975	0,9571	5,2322
5	1,0328	14,8583	1,1192	25,5762	1,0367	15,0252
6	1,0324	8,3546	1,0342	8,3928	1,0259	8,2676
7	0,9865	6,7539	1,0404	11,4175	0,9866	6,7591
8	0,9723	12,4803	0,9668	12,3669	0,9704	12,4348
9	1,0168	3,6844	1,0006	3,7336	1,0008	3,6526
10	0,9555	6,8015	1,0026	9,3827	0,9556	6,8021
11	0,928	10,0032	0,9349	10,3591	0,9138	9,5959
12	1,0033	10,0002	1,0329	11,5942	1,0021	9,9728
13	0,9937	3,7253	1,0375	6,7555	0,9941	3,7368
14	1,0044	9,4678	1,137	30,0153	1,0364	10,7445
15	0,9926	12,7283	1,0691	26,9167	1,011	14,6097
16	0,9812	7,1325	0,9952	7,7588	0,9795	7,081
17	1,0454	7,0005	1,0698	7,5939	1,0536	7,0834
18	0,9895	2,1392	1,0056	2,7801	0,9805	2,0029
19	1,0513	5,9046	1,1117	10,1679	1,0573	6,0339
20	0,976	4,7991	0,9948	5,5362	0,9736	4,7546
21	0,9892	6,0324	0,9816	5,9528	0,9845	5,9701
22	1,0587	9,3571	1,1132	14,0838	1,0673	9,7502
23	0,9696	10,4077	0,9781	10,8449	0,9634	10,1879
24	0,9606	10,1536	1,0355	21,1182	0,9556	9,9012
25	0,9456	23,499	0,9836	30,2088	0,9521	24,348
26	1,0007	11,7813	0,9924	11,4433	0,9776	11,1553
27	1,0145	11,3965	1,0666	15,7728	1,0225	11,7088
28	0,9434	6,9877	0,9841	8,824	0,9506	7,0624
29	0,9986	8,5507	1,0588	14,8627	0,9982	8,5313
m_λ	0,9959		1,0264		0,9951	
σ_λ^2	0,0011		0,0029		0,0014	
σ_λ	0,0332		0,0536		0,0374	
		13		3		13

Значения параметра экспоненциального закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=18$ приведены в таблице 1.8.

Таблица 1.8

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0271	10,2578	1,0525	11,4528	1,0295	10,3173
2	0,9992	13,6004	1,0149	14,408	1,004	13,7934
3	1,0452	30,2983	0,9855	28,8668	1,0355	29,554
4	0,9948	14,2192	1,0151	15,2224	0,9978	14,3165
5	1,0082	10,4226	1,0096	10,4646	1,0065	10,3773
6	0,9304	21,0138	0,8746	20,721	0,9231	20,5856
7	0,9757	17,8272	1,0027	20,2347	0,9723	17,6399
8	0,994	14,6985	1,0198	16,283	0,9871	14,5126
9	0,9998	23,7479	0,9932	23,4965	1,0017	23,8402
10	0,9775	10,2187	1,0284	14,7148	0,9937	10,9811
11	0,9844	36,8398	1,0324	41,9356	0,9836	36,7996
12	1,0239	15,1359	1,0063	14,7952	1,0184	14,9682
13	1,0139	5,5332	0,9886	6,3762	1,0101	5,5898
14	0,9793	14,6157	0,9525	13,8815	0,9711	14,2418
15	1,0213	13,5708	1,0507	15,5194	1,0211	13,5624
16	0,9907	13,4329	1,0056	14,2469	0,9878	13,3272
17	1,0061	24,0603	1,0331	26,7577	1,0286	26,1765
18	0,9965	26,835	1,0379	31,5281	1,0048	27,454
19	0,9363	11,6612	0,921	11,7442	0,9322	11,6481
20	0,9869	18,0129	0,9773	17,6869	0,9778	17,6994
21	0,9658	15,2997	0,9232	15,0138	0,9541	14,8432
22	1,0158	10,6789	1,018	10,7887	1,014	10,6015
23	1,0234	12,6209	1,0229	12,5996	1,0242	12,6504
24	0,9881	12,1475	1,0259	15,0593	0,9898	12,2102
25	0,9814	22,5003	1,0172	25,4466	0,9851	22,6775
26	0,9787	14,3113	1,0485	21,3315	0,9823	14,4102
27	0,969	19,929	0,9594	19,7503	0,9633	19,8002
28	1,0005	19,4525	1,0674	27,9585	1,023	21,1067
29	1,0198	20,3337	0,9708	20,7165	1,0204	20,3559
m_λ	0,9943		1,0019		0,9946	
σ_λ^2	0,0007		0,0019		0,0008	
σ_λ	0,0256		0,0434		0,0281	
		13		7		9

Значения параметра экспоненциального закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=2000$, $M=10$ приведены в таблице 1.9.

Таблица 1.9

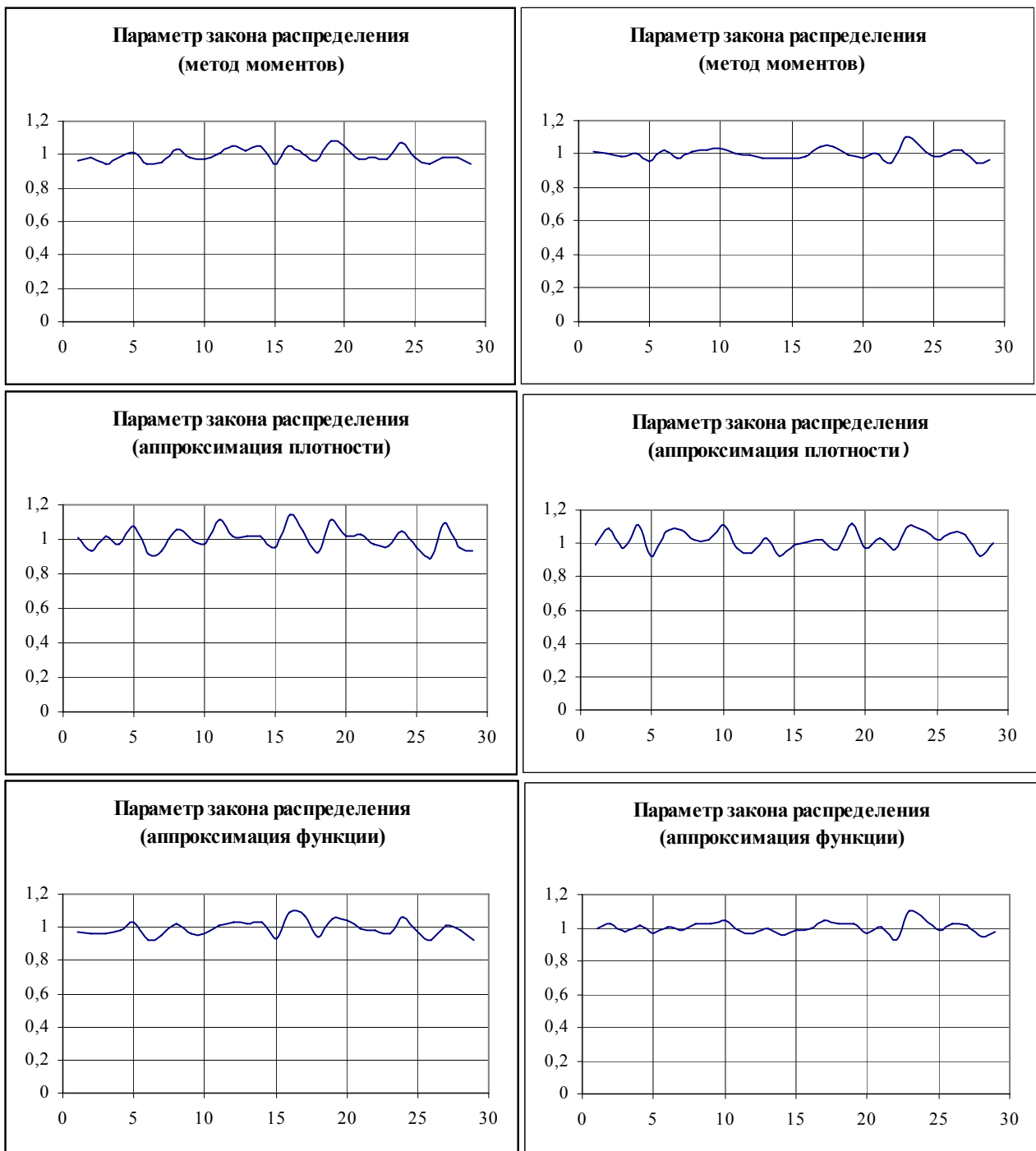
№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	1,0241	1,393	1,0496	2,953	1,0269	1,4516
2	1,0114	9,1015	1,0837	21,5671	1,02	9,5001
3	0,9978	16,6905	1,0618	24,962	1,007	16,8917
4	0,9983	8,7529	1,0392	12,8481	1,0069	9,063
5	1,0216	6,4273	1,0343	6,9874	1,0085	6,4185
6	0,9731	12,924	0,9815	13,2814	0,9809	13,2449
7	1,0064	5,7745	0,9885	5,8251	0,9964	5,6658
8	1,0177	4,2412	1,0687	11,0302	1,0243	4,5387
9	1,0258	7,3038	0,9981	7,8743	1,0144	7,2287
10	1,025	5,693	1,024	5,6821	1,0231	5,6756
11	0,9979	8,8985	1,0264	12,0568	0,9958	8,8
12	0,983	3,6603	1,0416	10,7836	0,9913	3,8256
13	1,0176	4,6825	1,09	15,7227	1,0286	5,0301
14	1,007	3,0428	1,0595	9,5598	1,0128	3,2295
15	1,0066	14,0535	1,049	19,1753	1,0067	14,0597
16	1,0097	2,616	1,0366	3,3768	1,0159	2,5643
17	1,0419	5,9817	1,0875	11,9207	1,0459	6,188
18	1,0274	1,9272	1,0406	2,868	1,0168	1,6241
19	1,001	2,4243	1,0094	2,6398	0,9989	2,411
20	0,9788	17,6288	1,0026	19,4305	0,9938	18,4818
21	0,9549	3,5462	0,9652	3,928	0,9507	3,5138
22	0,9945	9,0164	1,0197	11,9292	0,9864	8,6016
23	1,0144	11,6974	1,0428	13,7616	1,0114	11,6442
24	1,0052	6,6572	1,0201	6,9979	1,0048	6,659
25	0,9862	3,0045	1,017	4,7845	0,9905	3,0373
26	1,0454	6,4855	1,1108	18,3649	1,0479	6,6313
27	0,9975	3,7936	1,0214	4,5041	1,0052	3,7949
28	0,9529	8,303	0,9843	10,1554	0,9593	8,3522
29	0,9865	8,4269	1,0115	10,7165	0,9825	8,2882
m_λ	1		1,0294		1,0015	
σ_λ^2	0,0005		0,0012		0,0005	
σ_λ	0,0226		0,0351		0,0220	
		17				12

Значения параметра экспоненциального закона распределения λ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=2000$, $M=18$ приведены в таблице 1.10.

Таблица 1.10

№	Метод моментов		$f_a(x, \lambda)$		$F_a(x, \lambda)$	
	λ	χ^2	λ	χ^2	λ	χ^2
1	0,9794	10,1617	0,9584	10,059	0,9697	9,895
2	1,0224	16,1958	0,9949	15,4425	1,012	15,5854
3	0,9867	9,8839	0,9703	9,7776	0,9839	9,7889
4	0,9974	9,9698	0,9833	9,5732	0,9913	9,702
5	1,0016	23,7769	1,0104	24,5205	1,0073	24,2202
6	0,9658	10,4377	0,9582	10,4654	0,964	10,4228
7	0,9809	12,9358	1,0037	14,4621	0,9916	13,3732
8	1,0423	10,5038	1,0477	10,5962	1,0447	10,5321
9	0,9802	12,8098	1,0086	15,0988	0,9809	12,8247
10	0,9689	20,0785	0,9483	19,4067	0,9666	19,9074
11	0,9804	16,3282	0,9521	16,7887	0,9719	16,1237
12	1,0359	15,4342	1,0082	15,921	1,0283	15,3043
13	1,0075	18,4143	1,0049	18,202	0,9982	17,7708
14	1,0018	9,4575	1,0353	12,4702	1,0099	9,7615
15	0,9906	15,2913	0,9598	16,6502	0,9876	15,2649
16	0,9922	22,2428	1,0052	23,5444	0,9989	22,8196
17	1,0023	14,7416	0,9855	14,6823	1	14,6692
18	1,0277	19,8268	1,0112	19,6488	1,0165	19,6016
19	1,0066	21,2489	1,0549	29,6743	1,0117	21,6469
20	1,0123	19,1325	1,0371	21,5315	1,0153	19,2957
21	0,9998	6,5006	1,021	7,9402	1,0025	6,5794
22	1,0004	27,9311	0,9996	27,8663	1,0067	28,5342
23	1,0004	16,2423	0,9909	15,8569	1,0036	16,4662
24	1,0085	8,6399	1,0418	10,652	1,0233	8,9865
25	1,0124	14,2762	1,0361	16,6317	1,016	14,4854
26	0,9946	7,1896	1,0139	8,1032	1,003	7,3987
27	1,0497	19,7668	1,0538	20,1408	1,0548	20,2429
28	0,9862	12,6762	0,9846	12,6356	0,9799	12,578
29	0,9923	18,904	0,9928	18,9307	0,9911	18,8445
m_λ	1,0009		1,0025		1,0011	
σ_λ^2	0,0004		0,0009		0,0009	
σ_λ	0,0203		0,0308		0,0308	
	13			6		10

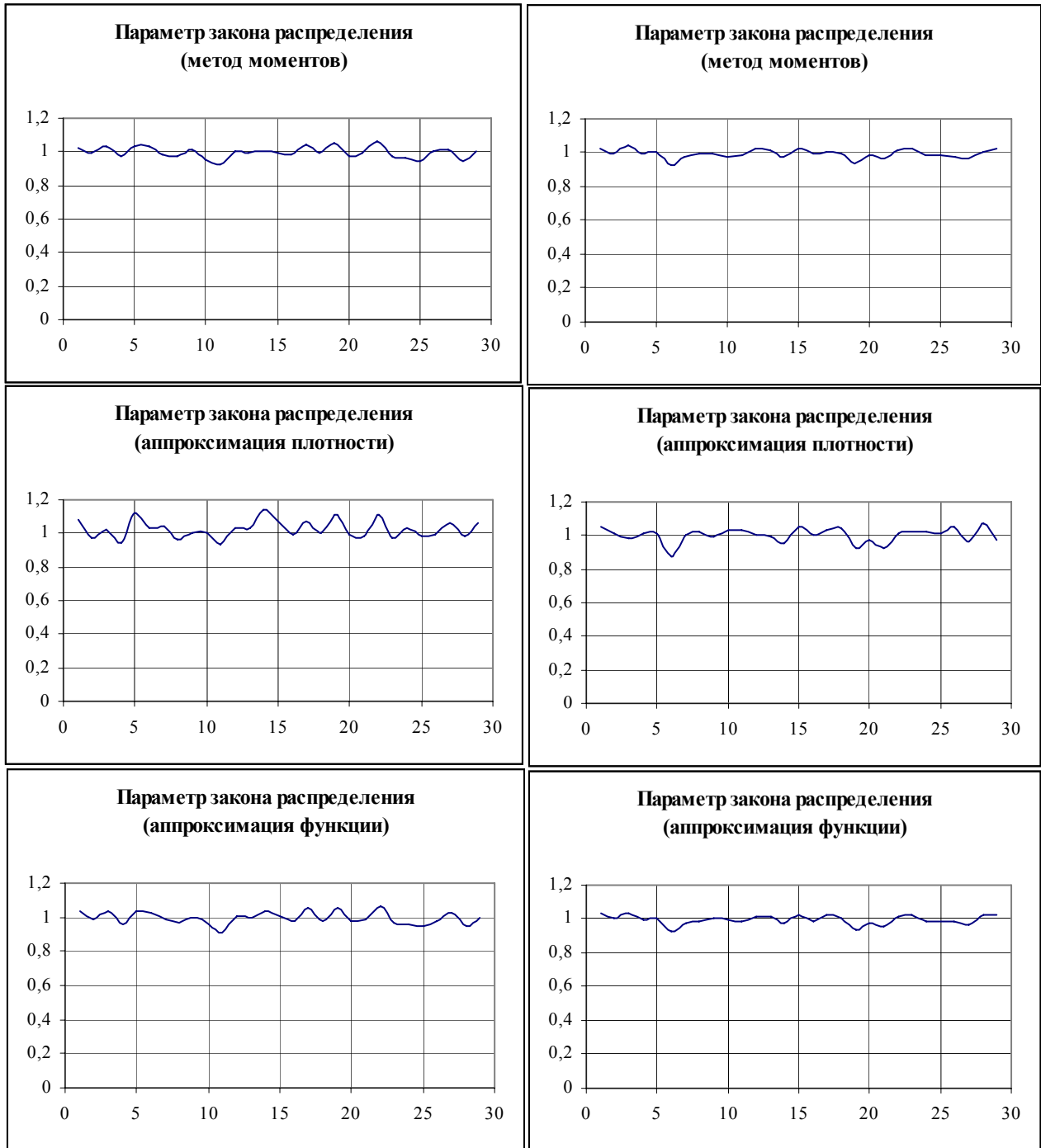
Ниже приведены результаты оценки параметра экспоненциального закона распределения различными аппроксимативными методами.



$N=500, M=10$

$N=500, M=18$

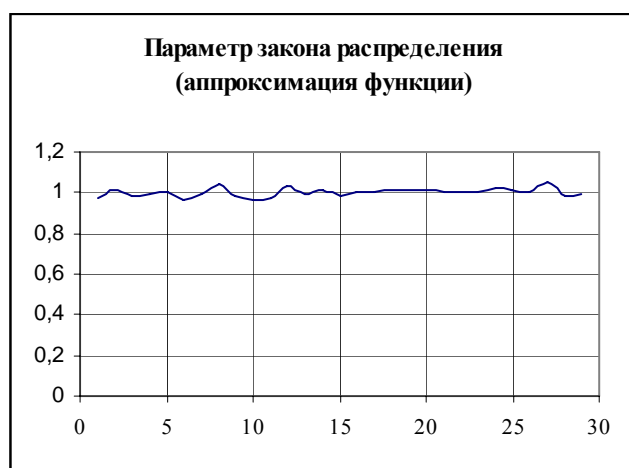
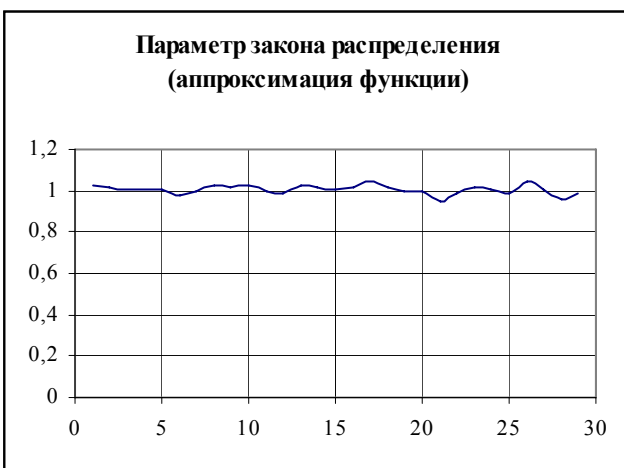
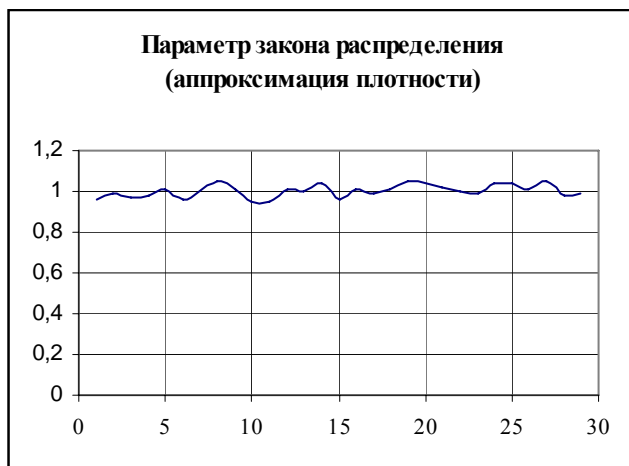
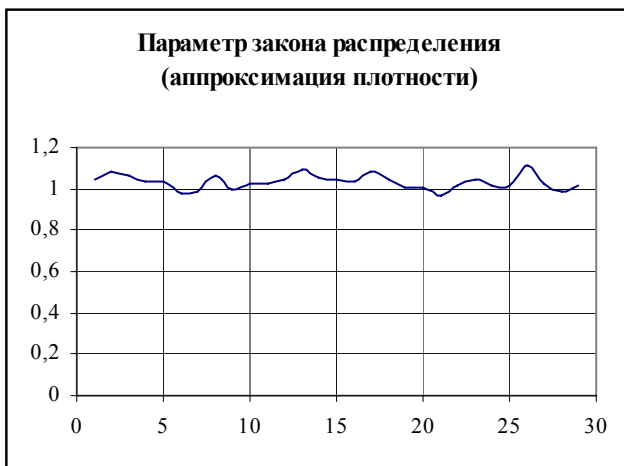
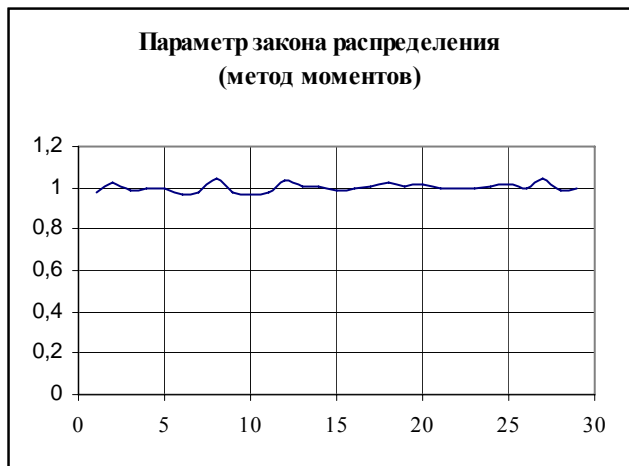
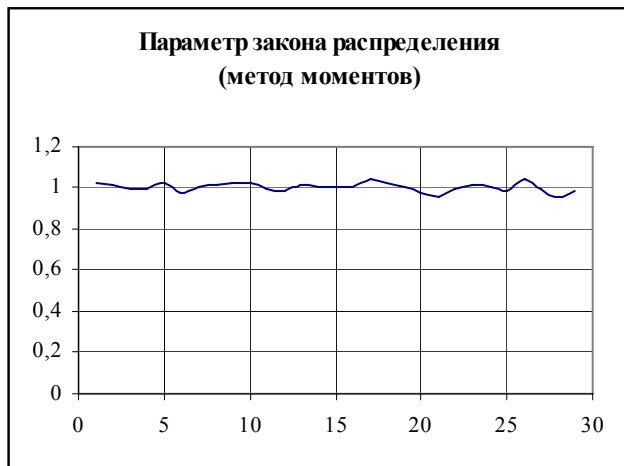
Рисунок 1.29. Результаты моделирования



$N=1000, M=10$

$N=1000, M=18$

Рисунок 1.30. Результаты моделирования



$N=2000, M=10$

$N=2000, M=18$

Рисунок 1.31. Результаты моделирования

Анализ результатов моделирования не позволяет однозначно определить лучший метод аппроксимации законов распределения. Поэтому наиболее целесообразно применять все три метода и, воспользовавшись критерием Пирсона, выбрать лучший результат.

Приведем результаты определения параметров закона распределения Лапласа $f_x(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$ (см. таблицы 1.11-1.13 и рисунки 1.32-1.34).

Значения параметров закона распределения Лапласа λ , μ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=500$, $M=20$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ приведены в таблице 1.11.

Таблица 1.11

№	Метод моментов			$f_a(x, \lambda)$			$F_a(x, \lambda)$		
	λ	μ	χ^2	λ	μ	χ^2	λ	μ	χ^2
1	1,0179	1,0136	12,9326	0,9305	1,0287	14,5135	1,0183	1,0014	12,818
2	1,0119	1,026	44,1078	0,952	0,9797	31,8058	0,98	1,0299	36,7747
3	0,975	0,9846	11,3897	0,9828	0,9498	11,3474	0,9814	0,9624	11,301
4	0,9613	1,0464	18,8828	1,0364	1,0262	26,0046	0,973	1,027	19,4855
5	1,0245	1,0346	8,1155	0,9456	0,991	7,6714	1,0036	1,001	6,8969
6	1,0084	1,0195	14,9323	1,0304	0,9502	13,3196	1,0283	0,9739	13,4562
7	0,9804	0,9639	36,4091	0,9075	1,061	31,3616	0,956	1,0005	33,2644
8	0,9831	0,9004	19,341	0,9114	1,0126	17,1324	0,9698	0,9274	17,7809
9	1,0538	1,0168	15,9261	0,9797	1,0636	13,948	1,0277	1,0278	14,424
10	1,1018	0,965	16,1997	1,008	0,9981	12,6598	1,0441	0,9853	13,1095
11	0,9938	0,9959	13,2639	1,005	0,9746	13,6505	0,9713	0,9793	12,6357
12	1,0676	1,0889	36,0318	1,0617	0,9738	32,2165	1,0925	1,0435	34,7533
13	1,033	0,9958	16,6106	1,1048	1,0412	21,9184	1,0666	1,0271	18,1493
14	0,9976	0,9705	16,0569	0,9071	0,9534	14,0773	0,9665	0,9568	14,425
15	1,0618	1,0702	22,4914	1,0483	1,0098	21,6046	1,0656	1,0725	22,7489
16	1,0042	1,0714	32,7119	0,917	1,0496	29,19	0,9758	1,0459	30,6862
17	0,9554	0,9993	48,385	0,9926	1,0735	66,7168	0,9893	1,0229	62,0146
18	0,8657	0,8986	34,8237	0,8819	0,9569	35,4142	0,9998	0,9602	39,67
19	1,0066	0,9676	24,2468	0,9516	1,0778	21,2604	0,9905	1,0264	21,6917
20	0,9441	0,9922	26,9386	1,0313	0,971	40,5035	0,9943	0,9902	33,0698
21	1,017	0,9675	10,5336	1,0618	1,0128	12,7816	1,019	0,9675	10,5837
22	1,0644	0,9456	32,0431	0,9458	0,9621	25,8512	1,026	0,965	28,6137
23	1,1088	1,008	12,1998	1,0063	0,9568	9,593	1,0462	0,9998	9,3113
24	1,0155	1,0219	21,0467	0,895	1,0121	15,5374	0,9415	1,0174	16,0781
25	0,9978	1,0789	8,9706	0,916	1,0145	8,4177	0,9749	1,0484	7,7737
26	0,9087	1,0396	15,7384	0,8332	1,0674	16,98	0,9231	1,0392	16,4251
27	1,0673	0,9589	17,4717	1,0654	0,9654	17,4429	1,066	0,9556	17,4046
28	1,0348	1,0924	22,3178	1,0135	1,0615	22,441	1,0192	1,089	21,1523
29	0,9805	1,0946	16,1374	0,9071	1,0283	17,1125	0,9713	1,0918	15,7979
m_x	1,0084	1,0079		0,9734	1,0077		1,0028	1,0081	
σ_x^2	0,0028	0,0028		0,0045	0,0018		0,0017	0,0017	
σ_x	0,0531	0,0526		0,0668	0,0419		0,0408	0,0414	
			7			13			9

Значения параметров закона распределения Лапласа λ , μ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=1000$, $M=20$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ приведены в таблице 1.12.

Таблица 1.12

№	Метод моментов			$f_a(x, \lambda)$			$F_a(x, \lambda)$		
	λ	μ	χ^2	λ	μ	χ^2	λ	μ	χ^2
1	0,9988	0,928	65,131	0,9338	0,9742	46,561	0,9939	0,9573	63,4227
2	0,9944	0,9618	24,4175	1,0016	0,9327	25,4525	0,9845	0,9703	23,8409
3	0,9796	0,9827	13,549	0,9913	1,012	14,8125	0,9659	0,989	12,3941
4	1,0222	1,0386	12,3868	0,9553	1,0964	13,7612	1,0076	1,0507	11,5491
5	1,008	0,9916	17,5857	0,9807	0,9896	15,8648	0,9954	0,9859	16,5724
6	1,0297	1,0082	16,5055	1,0293	0,9747	15,5615	1,0266	0,9866	15,5049
7	0,9697	0,9699	23,939	0,9938	1,0247	25,2401	0,9637	0,9959	22,2571
8	0,9833	0,9139	22,1949	0,8889	0,9888	20,7867	0,946	0,9378	18,7916
9	1,0002	0,958	59,7864	0,9546	1,015	48,7866	0,9903	0,9894	56,7673
10	1,0429	0,9356	12,6514	1,0043	0,9779	13,1625	1,0368	0,9407	12,3748
11	0,9847	0,9506	21,0223	0,9507	0,911	21,2669	1,0051	0,9566	22,9291
12	1,0316	0,9658	22,581	0,9017	0,9714	18,2349	0,9752	0,981	16,7811
13	0,9773	0,9778	13,0769	0,9208	0,9382	9,8581	0,9916	0,9659	9,9516
14	1,0162	0,9561	28,1574	1,0478	0,9909	32,2639	1,0425	0,969	31,1108
15	0,9888	0,9788	40,513	0,9198	0,956	35,5703	1,0274	0,9803	50,4561
16	1,033	1,0901	16,002	1,0275	1,0283	15,3962	1,0171	1,0721	13,9585
17	0,9709	0,9608	22,0434	0,9964	0,9828	23,785	0,9842	0,9825	22,6568
18	1,0621	1,057	37,1984	1,0923	1,0159	43,4504	1,0918	1,0468	41,7692
19	1,0116	1,0206	11,5929	1,0872	0,9919	15,1478	1,0507	0,9976	11,7603
20	1,0086	1,024	6,6395	0,8802	0,9739	15,1958	0,976	1,029	5,5435
21	0,9773	0,9893	14,692	1,0035	0,935	16,6562	0,9853	0,9735	14,669
22	1,0029	1,0409	16,8565	1,047	1,0605	20,8638	1,0113	1,0357	17,3595
23	0,9826	1,0552	17,1639	0,8937	1,0296	18,4228	0,975	1,0283	15,8358
24	0,9886	1,0227	10,2612	0,9843	1,0543	10,2316	0,9936	1,0508	10,348
25	0,9519	1,0225	29,0898	0,9484	1,0844	29,3521	0,9583	1,0463	30,0735
26	0,9881	0,986	30,3051	1,031	1,0706	37,197	1,0037	1,0052	30,9946
27	0,9956	0,9428	29,3156	1,0426	0,956	37,4214	1,0129	0,9444	31,6612
28	1,093	0,9807	17,3819	0,9557	0,9541	18,9961	1,0443	0,9818	14,0926
29	0,988	1,0706	17,4652	0,9335	0,9865	12,5903	0,9612	1,0329	13,1974
m_x	1,0028	0,9924		0,9792	0,9958		1,0006	0,9960	
σ_x^2	0,0009	0,0020		0,0033	0,0022		0,0011	0,0014	
σ_x	0,0299	0,0448		0,0578	0,0467		0,0326	0,0369	
			9			8			11

Значения параметров закона распределения Лапласа λ , μ и χ^2 при аппроксимации закона распределения по методу моментов, плотности распределения вероятностей и функции распределения по минимуму квадратической погрешности аппроксимации для $N=2000$, $M=20$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ приведены в таблице 1.13.

Таблица 1.13

№	Метод моментов			$f_a(x, \lambda)$			$F_a(x, \lambda)$		
	λ	μ	χ^2	λ	μ	χ^2	λ	μ	χ^2
1	1,0035	0,954	18,3181	0,9354	0,9627	21,1939	0,9933	0,9679	17,1265
2	0,9526	0,9901	23,9196	0,9589	0,9579	22,7506	0,9703	0,9711	24,4018
3	1,0414	1,0087	12,1182	1,0293	0,9897	10,9312	1,0192	0,9987	10,3592
4	1,0037	0,985	16,3162	0,9753	1,0094	16,4258	0,9924	0,9985	15,1883
5	0,9823	0,9942	18,976	0,9816	0,9555	18,611	0,9706	0,9886	17,6714
6	1,0287	1,0324	15,5928	1,0356	1,0072	15,6684	1,0247	1,0162	14,3696
7	1,02	0,9366	26,2669	1,0621	1	31,2517	1,0313	0,9606	24,8301
8	0,9939	1,0116	9,0151	1,0472	0,9929	14,7895	1,0066	0,9969	8,9097
9	0,9951	0,9963	16,4525	1,0329	1,0233	21,4902	0,9997	1,0049	16,4004
10	1,0328	0,9857	17,5749	0,9716	0,9987	16,0183	1,0046	0,9963	15,0382
11	0,9962	1,0358	14,755	0,9807	1,0123	13,337	0,9805	1,0252	13,267
12	1,009	1,0262	14,1774	0,9739	1,052	14,6954	1,0069	1,0353	13,9515
13	0,9955	0,9947	12,6575	1,039	1,0009	18,6853	1,0062	0,9993	13,3651
14	0,9932	1,0376	33,4976	1,0686	0,9508	49,0293	1,0312	1,012	35,5674
15	1,0057	1,0268	28,0542	0,9572	0,9487	34,276	1,0408	1,022	32,9378
16	1,0072	1,0099	11,5106	0,9836	1,0134	9,9577	0,987	1,014	10,054
17	0,9762	1,0204	10,0031	0,9696	0,9915	8,5943	0,9716	1,0012	8,7458
18	0,9935	1,0141	25,6818	1,0005	0,96	25,4978	0,9856	0,996	23,4797
19	1,0036	1,0063	12,7575	0,9984	0,9901	13,0342	1,0143	1,0068	13,2958
20	0,994	1,0129	16,6464	0,9832	1,0321	16,4062	1,0145	1,0257	16,9398
21	1,0282	1,0028	29,0172	0,9579	0,9569	31,9704	1,0157	0,9982	27,8138
22	0,9609	1,0156	23,1503	0,8551	1,0133	33,8199	0,9496	1,0045	21,3061
23	1,0069	1,0032	10,859	0,9556	0,9787	14,5239	1,0008	1,0129	10,6128
24	0,9876	1,0506	16,2526	0,9442	0,9952	17,697	0,9783	1,0354	15,166
25	1,0344	0,9726	8,179	0,9818	1,0288	12,8263	1,0229	0,9813	7,6053
26	0,9907	1,0304	23,2731	0,9774	0,9921	21,4689	0,9752	1,0143	21,2952
27	1,0175	1,0045	27,4362	0,9255	1,0051	38,0156	1,0167	1,006	27,4033
28	0,9708	1,0066	7,1989	0,9327	0,9717	11,3213	0,9847	0,9978	7,3869
29	1,036	1,0571	28,1256	1,0718	1,0355	32,1392	1,0436	1,0436	28,2522
m_x	1,0021	1,0080		0,9857	0,9940		1,0013	1,0045	
σ_x^2	0,0005	0,0007		0,0023	0,0007		0,0005	0,0004	
σ_x	0,0217	0,0257		0,0475	0,0271		0,0230	0,0192	
			6			4			19



$N=500, M=20, \lambda = 1$

$N=500, M=20, \mu = 1$

Рисунок 1.32. Результаты моделирования



$N=1000, M=20, \lambda = 1$

$N=1000, M=20, \mu = 1$

Рисунок 1.33. Результаты моделирования



$N=2000, M=20, \lambda = 1$

$N=2000, M=20, \mu = 1$

Рисунок 1.34. Результаты моделирования

Анализ результатов показывает некоторое преимущество метода аппроксимации функций распределения. Однако для получения более надежного результата, как и в предыдущем примере, для решения одной задачи целесообразно применить все разработанные методы и выбрать в соответствии с критерием лучший результат.

2. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ ЗАДАННОГО ВИДА

2.1. Основные понятия и определения

Важной частью статистического анализа является корреляционный анализ. Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем [92], выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса [86], оценивать погрешности средств измерений [104], определять скорость проката, строить корреляционные приёмники и т.д.[70]. Для экспериментального определения корреляционных функций применяются как специализированные вычислительные средства - коррелометры, так и универсальные вычислительные машины.

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент её значений при двух значениях аргумента t, t' , рассматриваемый как функция t, t' [45]:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t')], \quad (2.1)$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, а $m_x(t)$ - математическое ожидание случайного процесса в сечении t .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)}\sqrt{D_x(t')}}. \quad (2.2)$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией $\tau = t - t'$ [44]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (2.3)$$

Это свойство позволяет определять корреляционную функцию только во временном интервале $[0, \infty)$.

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (2.2), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (2.5)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 2.1, а их классификация – на рис. 2.1.

Следует отметить, что 8-ая модель может быть корреляционной функцией только в том случае, если $|C| \leq \alpha/\omega_0$. В противном случае спектральная плотность $S_x(\omega) < 0$ (см. таблицу 6.8).

Из анализа моделей видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные и колебательные. В приложении П.12 приведены графики экс

Типовые модели корреляционных функций

Таблица 2.1.

№	$\rho_x(\tau)$
1	$e^{-\alpha \tau }$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)$
5	$e^{-\alpha \tau }\text{Cos}\omega_0\tau$
6	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$
7	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau-\alpha/\omega_0\text{Sin}\omega_0\tau)$
8	$e^{-\alpha \tau }(\text{Cos}\omega_0\tau+C\text{Sin}\omega_0\tau)$

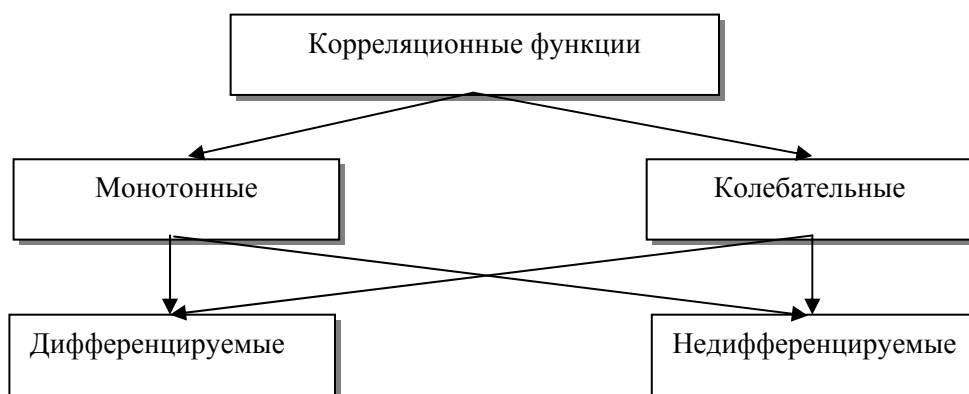


Рисунок 2.1. Классификация корреляционных функций

по экспоненциальной (модель 1) и экспоненциально-косинусной (модель 5) корреляционных функций.

Из графиков видно, что в «нуле» производная корреляционных функций имеет разрыв первого рода. То есть случайный процесс относится к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6, 8 таблицы 2.1).

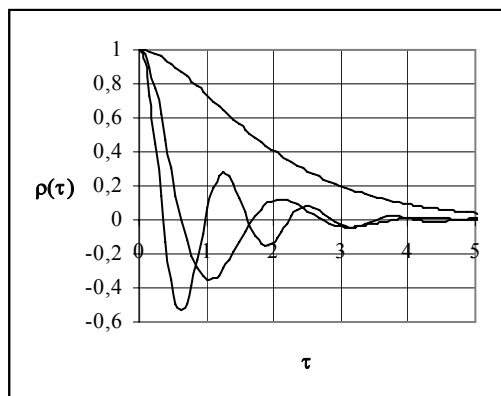


Рисунок 2.2.

Пример корреляционной функции дифференцируемого случайного процесса (модель 6), при различных сочетаниях параметров: $\omega_0 / \alpha = 0, 3, 5$, - представлен на рис. 2.2.

Отметим, что корреляционная функция n -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами.

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7, 8);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6, 8).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [87].

В практических приложениях часто для описания временной зависимости нормальных стационарных процессов применяют [80]:

- релейную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = k_\phi \sigma_x \rho_x(\tau); \quad (2.7)$$

- полярную (знаковую) корреляционную функцию

$$P_x(\tau) = M \left[\text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{x}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_x(\tau). \quad (2.8)$$

По найденной релейной корреляционной функции можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{M \left[\overset{\circ}{x}(t) \right]}. \quad (2.9)$$

Отметим, что $R_x(0) = M[\overset{\circ}{x}(t)] = k_\phi \sigma_x$. Отсюда видно, что для оценки релейной корреляционной функции процессов, отличных от нормального, необходима априорная информация о законе распределения, т.е. необходимо знание k_ϕ .

Зная полярную корреляционную функцию, из выражения (2.7) можно найти нормированную корреляционную функцию:

$$\rho_x(\tau) = \sin \frac{\pi}{2} P_x(\tau). \quad (2.10)$$

Из выражения (2.8) следует, что при оценке полярной корреляционной функции теряется информация о мощности процесса.

Несмотря на ограничения на закон распределения, релейные и полярные корреляционные функции находят широкое применение при решении различных практических задач. Это объясняется простотой технической реализации алгоритмов.

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяют параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой инфор-

мации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

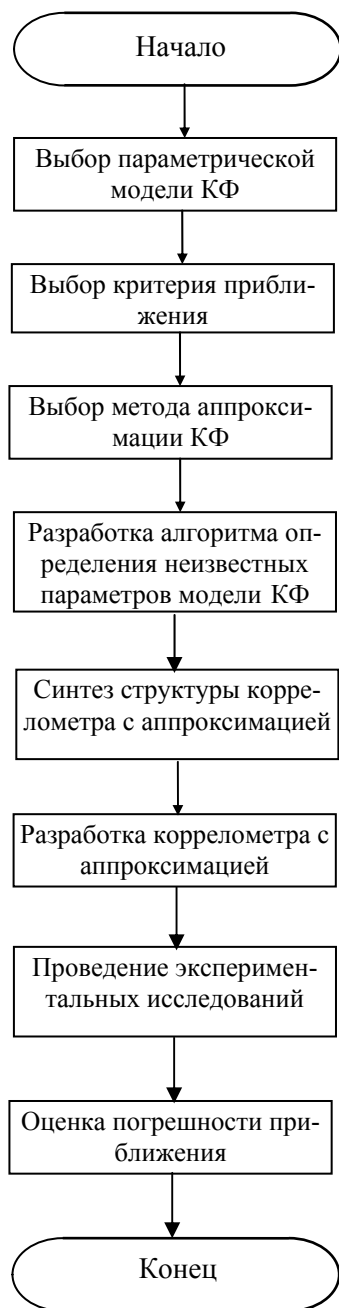


Рисунок 2.3. Блок-схема аппроксимации

В общем виде задача аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями включает этапы, представленные на рис. 2.3.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [87, 96];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [6, 87, 96, 111].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего не известно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желатель-

но с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя.

Многочисленные исследования [42, 79, 80, 82, 87, 91, 92, 96] показали, что при анализе случайных процессов часто встречаются затухающие экспоненциальные и экспоненциально-косинусные корреляционные функции (см. рис. 2.4).

Например, экспоненциальная модель корреляционной функции оказывается весьма полезной при определении скорости затухания корреляционной функции, оценки интервала корреляции и т.д. Подобные задачи возникают при создании ин-

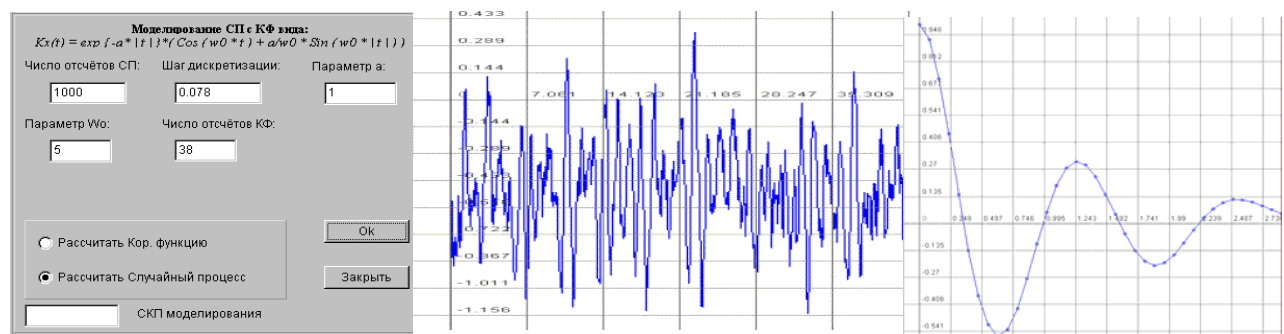
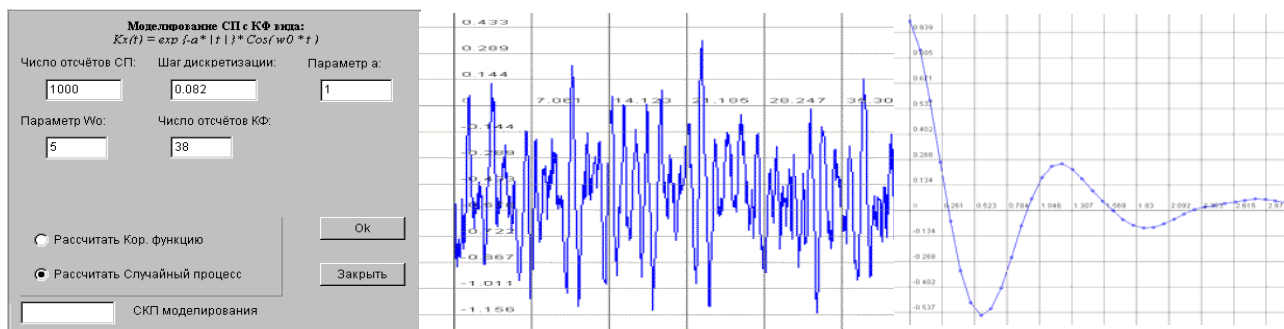
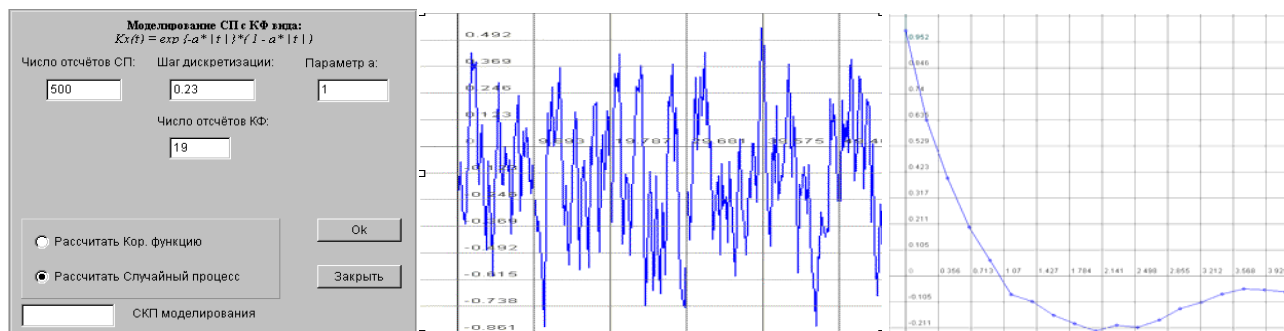
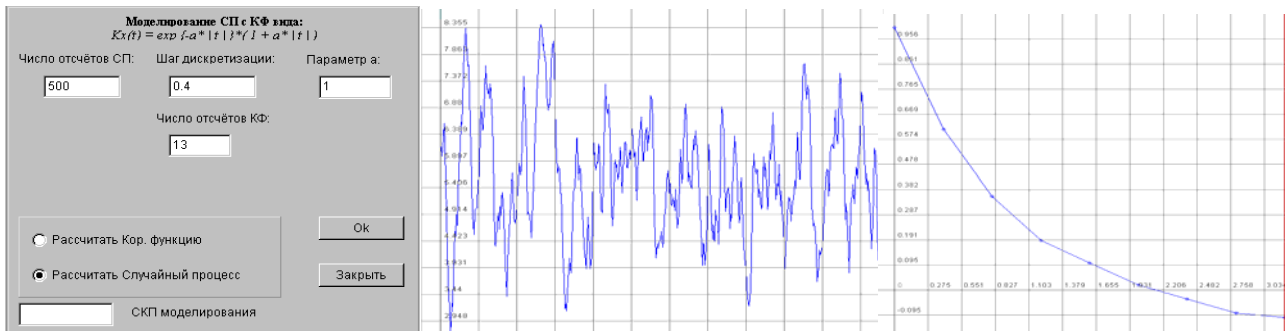
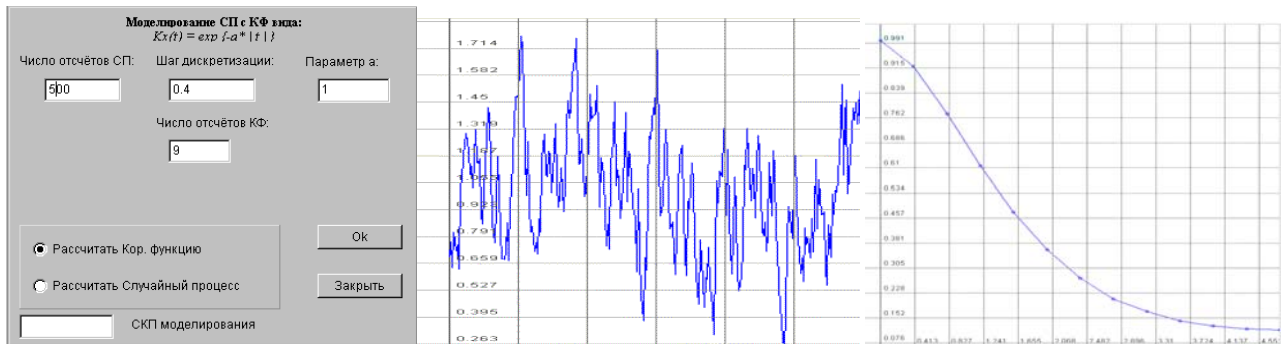


Рисунок 2.4. Случайные сигналы и их корреляционные функции

мационно-измерительных систем, систем автоматического управления и регулирования, систем передачи данных, когда приходится выбирать шаг дискретизации во времени, постоянные времени сглаживающих устройств при получении оценок сигнала. Часто данная модель выбирается в качестве базовой при оценке точностных характеристик реальных объектов, так как существует большой класс динамических систем, для которых процессы с экспоненциальной корреляционной функцией являются наилучшими с точки зрения помехозащищенности. Кроме того, при теоретических исследованиях часто делается допущение о том, что анализируемый процесс является марковским. В [79] доказывается теорема, согласно которой стационарный гауссов случайный процесс является марковским тогда и только тогда, когда его нормированная корреляционная функция имеет вид $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$.

При прохождении сигналов через узкополосные системы, их нормированные корреляционные функции имеют вид: $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ [79].

Знание параметров таких функций позволяет определить интервал корреляции процесса, резонансную частоту системы и т.д.

Всё это свидетельствует о фундаментальной роли экспоненциальных и экспоненциально-косинусных корреляционных функций и приводит к необходимости выбирать в качестве моделей функции именно этого вида.

Обычно в качестве критерия приближения применяют точностные критерии [56]:

- минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min; \quad (2.11)$$

- минимум экспоненциально-взвешенной аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 e^{-\frac{\tau}{\tau_k}} d\tau = \min, \quad (2.12)$$

где τ_k - максимальный интервал корреляции [96];

- критерий равномерного приближения:

$$|K_x(\tau) - K_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)| < \varepsilon, \quad (2.13)$$

где ε - некоторая сколь угодно малая величина.

Реже применяются неточностные критерии. Так, например, в [56] выбран критерий соответствия вида модели виду корреляционной функции исследуемого процесса. В общем случае этот критерий не обеспечивает ни минимума квадратической, ни минимума экспоненциально-взвешенной погрешности аппроксимации. Так как корреляционная функция определяется в результате эксперимента, имеют место случайные погрешности. Поэтому, для получения модели нецелесообразно прибегать к интерполированию. Кроме того, во многих случаях нет необходимости требовать близости модели к корреляционной функции исследуемого процесса в равномерном смысле, а достаточно лишь интегральной близости функций.

Практика показывает [54, 56, 87, 94, 95, 111], что в этом случае наиболее целесообразно применять квадратическое приближение.

Обсудив основные требования, предъявляемые к моделям корреляционных функций, критериям оптимальности, перейдем к методам аппроксимации корреляционных функций.

Классификация методов аппроксимации корреляционных функций параметрическими моделями представлена на рис. 2.5.

Наиболее общими свойствами обладает аппроксимация корреляционных функций с использованием ряда по ортогональным функциям или полиномам Лагерра, Лежандра, Чебышева, Эрмита и т.д. Однако, при анализе узкополосных процессов, когда корреляционная функция имеет слабозатухающий колебательный характер (см. приложение П.12), аппроксимация ортогональным рядом потребует большого числа членов разложения, что неудобно как при использовании аналитического выражения, так и при построении аппаратуры. Другим недостатком метода и известных ортогональных коррелометров является то, что предложенные эмпирические способы численных значений параметров ортогональных функций (постоянных времени ортогональных фильтров), основанные на знании корреляционных функций исследуемых процессов, не позволяют получить наилучшую аппроксимацию корреляционных функций. В реальных же условиях, когда не имеется достаточной априорной информации о свойствах процесса, и постоянная времени фильтров выбирается произвольно, это обстоятельство приводит к существенным отличиям получаемой оценки корреляционной функции от действительной [53, 87, 96]. Определение же оптимального значения постоянной времени фильтров требует многократного воспроизведения исследуемого процесса, что значительно увеличивает время анализа. Метод нашел широкое применение при анализе широкополосных процессов.

Коррелометры с аппроксимацией степенными рядами обеспечивают удовлетворительные результаты лишь при малых значениях аргумента. Увеличение значения аргумента приводит к увеличению числа членов разложения ряда и усложнению коррелометра. Полученную таким образом модель корреляционной функции очень трудно использовать в дальнейших расчётах. Кроме того, затруднено вычисление таких характеристик, как интервал корреляции, показатель колебательности и т.д. Метод наиболее целесообразно применять при анализе высокочастотных процессов.

Метод разложения в ряд по ортогональным полиномам реализации исследуемых процессов с последующим вычислением корреляционных функций позволяет строить коррелометры без запаздывания [111]. Однако, техническая реализация этого метода затруднена. Кроме этого, он не свободен от указанного недостатка: неудобство модели для дальнейших исследований.

Все рассмотренные методы и реализующие их технические устройства основаны на аналоговой форме представления исследуемых процессов. Присутствующие в их составе линейные множительные устройства во многом определяют точность вычисления параметров модели, частотный диапазон, сложность аппаратной реализации и т.д. Применение кусочно-постоянных ортогональных функций Уолша, Хаара, реализуемых на базе элементов импульсной техники, позволит освободиться от указанных недостатков: упростить аппаратуру, заменить линейные множительные устройства знаковыми и т.д.

Основной недостаток этого метода заключается в сложности интерпретации полученных результатов. Так, например, при аппроксимации в базисе функций Уолша

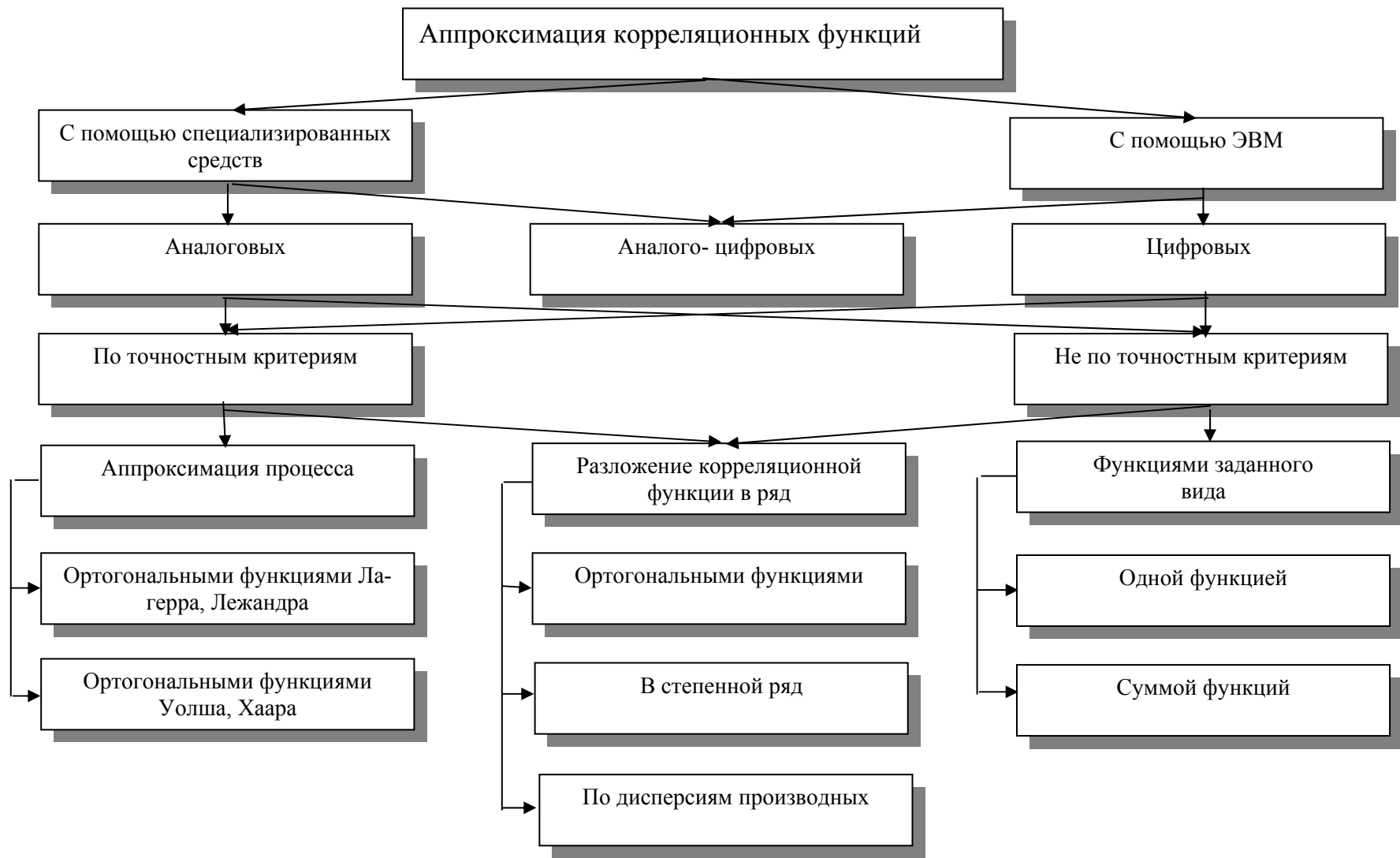


Рисунок 2.4. Классификация методов аппроксимации корреляционных функций

корреляционной функции вида $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ с погрешностью 3-5 % требуемое число членов разложения равно 16-32. Все это, в конечном счёте, затрудняет использование полученной модели в дальнейших исследованиях.

Рассмотрим 4, 5 и 8 этапы применительно к решению наиболее часто встречающихся задач аппроксимации корреляционных функций:

- функциями заданного вида, параметры которой удовлетворяют минимуму квадратической погрешности аппроксимации;
- ортогональными функциями Лагерра.

2.2. Метод аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида

При выбранной аналитической модели корреляционной функции задача сводится к определению неизвестных параметров, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации [50]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau = \min. \quad (2.14)$$

Условием минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = 2 \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)] \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau = 0. \quad (2.15)$$

(i = 1, ... n)

Или

$$\int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau - \varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad (2.16)$$

(i = 1, ... n)

где

$$\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau. \quad (2.17)$$

Разделив левые и правые части уравнений системы (2.16) на $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$, получим:

$$\frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} d\tau - 1 = 0. \quad (2.18)$$

Введем обозначение

$$h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} \quad (2.19)$$

и умножим левые и правые части уравнений системы на D_x .

Тогда

$$\int_0^{\infty} K_x(\tau) h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) d\tau - D_x = 0. \quad (2.20)$$

(i = 1, ... n)

Учитывая, что $K_x(\tau) = M \left[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t-\tau) \right]$, а $D_x = M \left[\overset{\circ}{x}^2(t) \right]$, систему уравнений

приведем к виду:

$$M \left[\overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau \right] - M \left[\overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0 \quad (2.21)$$

(i = 1, ... n)

Таким образом, задача аппроксимации корреляционных функций сводится к решению системы уравнений (2.21). Эта система может быть решена как с помощью специализированной аппаратуры, так и с помощью ЭВМ.

Аппаратура для решения этой системы будет состоять из n эквивалентных по структуре каналов. Блок-схема каждого канала имеет вид, представленный на рис 2.6 [1].

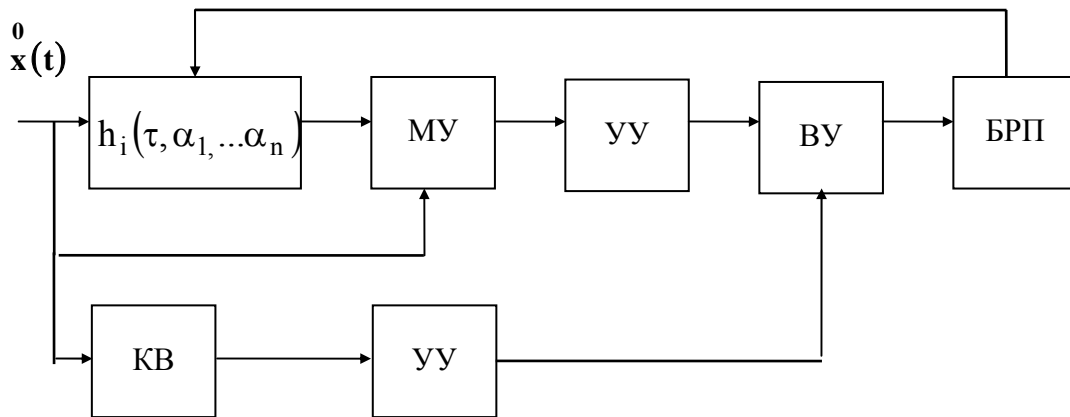


Рисунок 2.6. I-й канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Проведя преобразования, систему уравнений (2.21) можно привести к виду:

$$M \left[\overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0 \quad (2.22)$$

(i = 1, ... n)

Структурная схема i -ого канала этого коррелометра, представленная на рис.2.7, отличается от предыдущей перестановкой блоков и отсутствием одного усредняющего устройства [87].

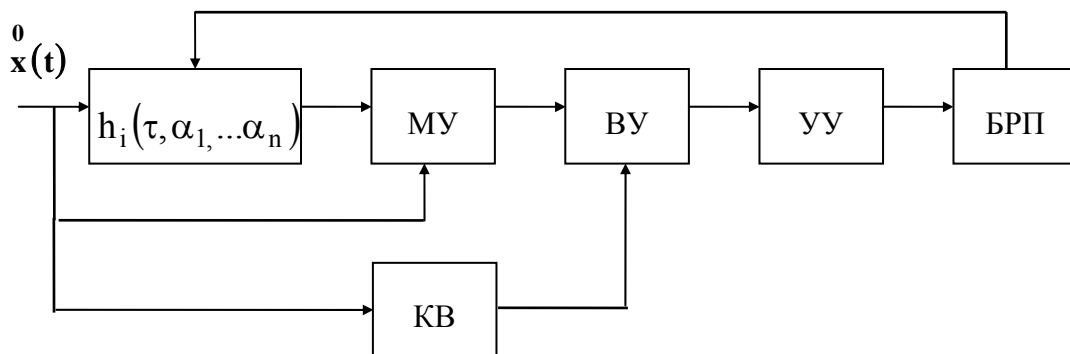


Рисунок 2.7. I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

Если привести систему уравнений (2.21) к виду

$$M \left\{ \overset{\circ}{x}(t) \left[\int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t-\tau) d\tau - \overset{\circ}{x}(t) \right] \right\} = 0, \quad (2.23)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

возможна ещё одна аппаратная реализация каждого канала (см. рис 2.8). Заметим, что в структуре канала отсутствует квадратор, что, в свою очередь, упрощает его техническую реализацию [87].

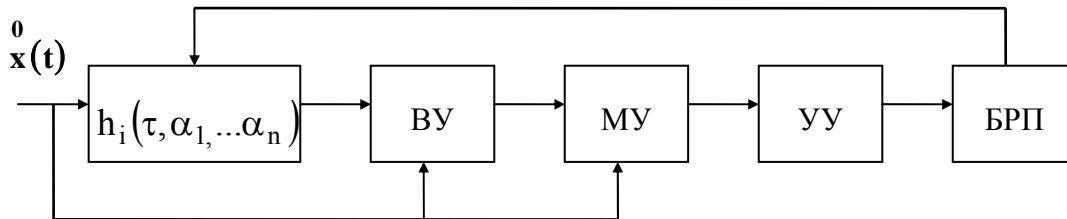


Рисунок 2.8. I-ый канал коррелометра с аппроксимацией параметрическими моделями

На рис. 2.9 приведена одна из разработанных структурных схем двухканального коррелометра с аппроксимацией [7].

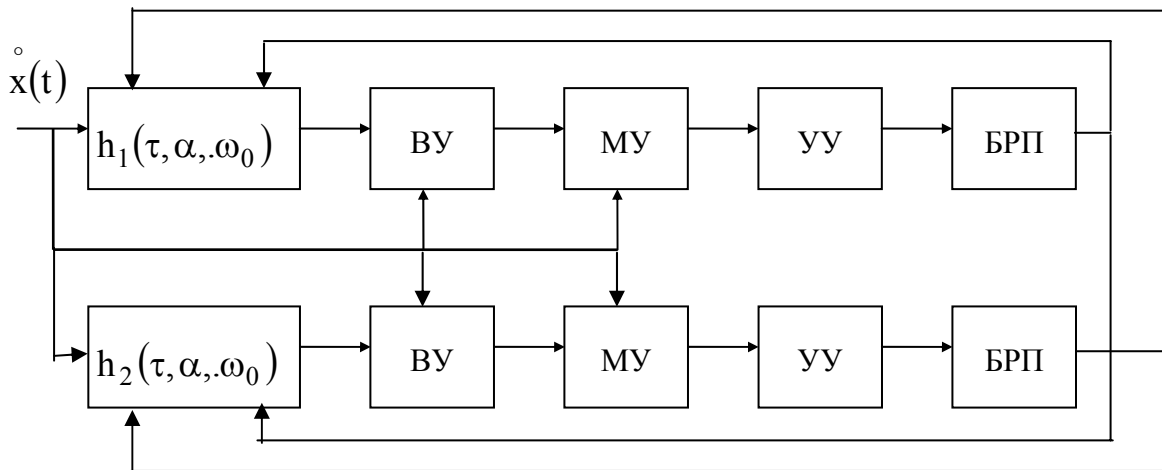


Рисунок 2.9. Двухканальный коррелометр

В [12] разработана еще одна структурная схема для аппроксимации корреляционных функций двухпараметрическими моделями, представленная на рис. 2.10.

На рис. 2.10 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормирования; 2 – фильтр с регулируемыми параметрами; 3, 8, 13 – блоки вычитания; 4, 9 – блок умножения; 5, 10 – блок усреднения; 6, 7 – блоки регулировки параметров; 11 – регулируемый функциональный преобразователь; 12- блок оценки интервала корреляции; 14 – блок деления.

Блок 12 формирует оценку интервала корреляции в виде несобственного интеграла от квадрата нормированной корреляционной функции [96].

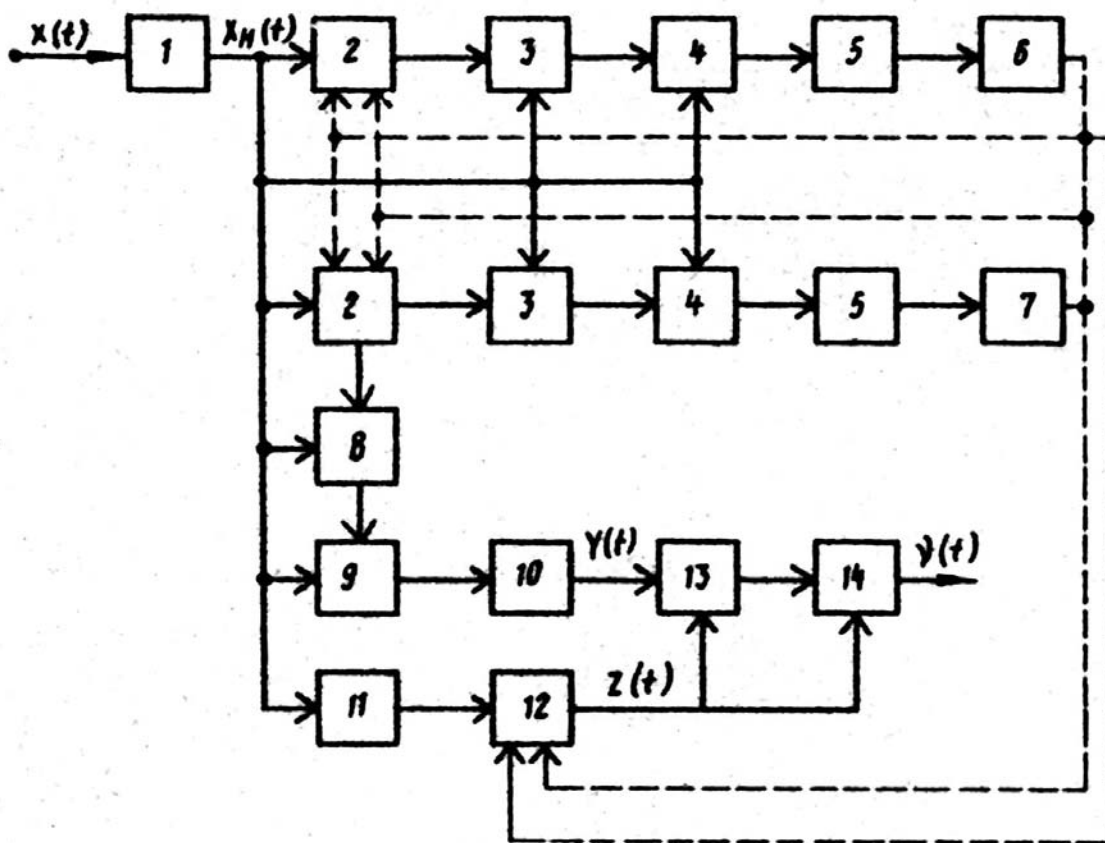


Рисунок 2.10. Коррелометр с аппроксимацией двухпараметрическими моделями

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на вход стационарного центрированного случайного процесса блоки регулировки параметров 6, 7 изменяют параметры фильтров 2 до обнуления сигналов на выходах блоков усреднения 5. Установившиеся значения параметров фильтров принимаются в качестве параметров одной из заданных моделей корреляционных функций. При этом обеспечивается минимум относительной погрешности аппроксимации корреляционной функции исследуемого случайного процесса выбранной моделью.

В [10] была разработана структурная схема коррелометра с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью, представленная на рис. 2.11.

На рис. 2.11 приняты следующие обозначения:

1 – блок нормировки; 2 – источник эталонного напряжения; 3, 14 – блоки вычитания; 4, 8, 9 – блоки умножения; 5 – регулируемый фильтр; 6, 7 – ключи; 10, 11 – сумматоры; 12, 13 – блоки усреднения; 15 – блок регулировки параметра; 16 – блок регулировки частоты; 17 – генератор ортогональных сигналов.

Устройство работает следующим образом. При поступлении на вход блока нормировки, являющийся входом устройства, центрированной реализации случайного процесса $x(t)$ блок 15 изменяет параметр α регулируемого фильтра с передаточ-

ной функцией $W(p, \alpha) = \frac{\pi}{2(1 + p/\alpha)^2}$. В свою очередь, блок 16 изменяет частоту генератора 17 до обнуления выходных сигналов блоков 12 и 13. Установившиеся значения параметра α и частоты ω_0 принимаются в качестве оценки параметров нормированной корреляционной функции $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Предлагаемый коррелометр позволяет оценить параметры аппроксимирующего выражения, удовлетворяющие минимуму квадратической погрешности аппроксимации.

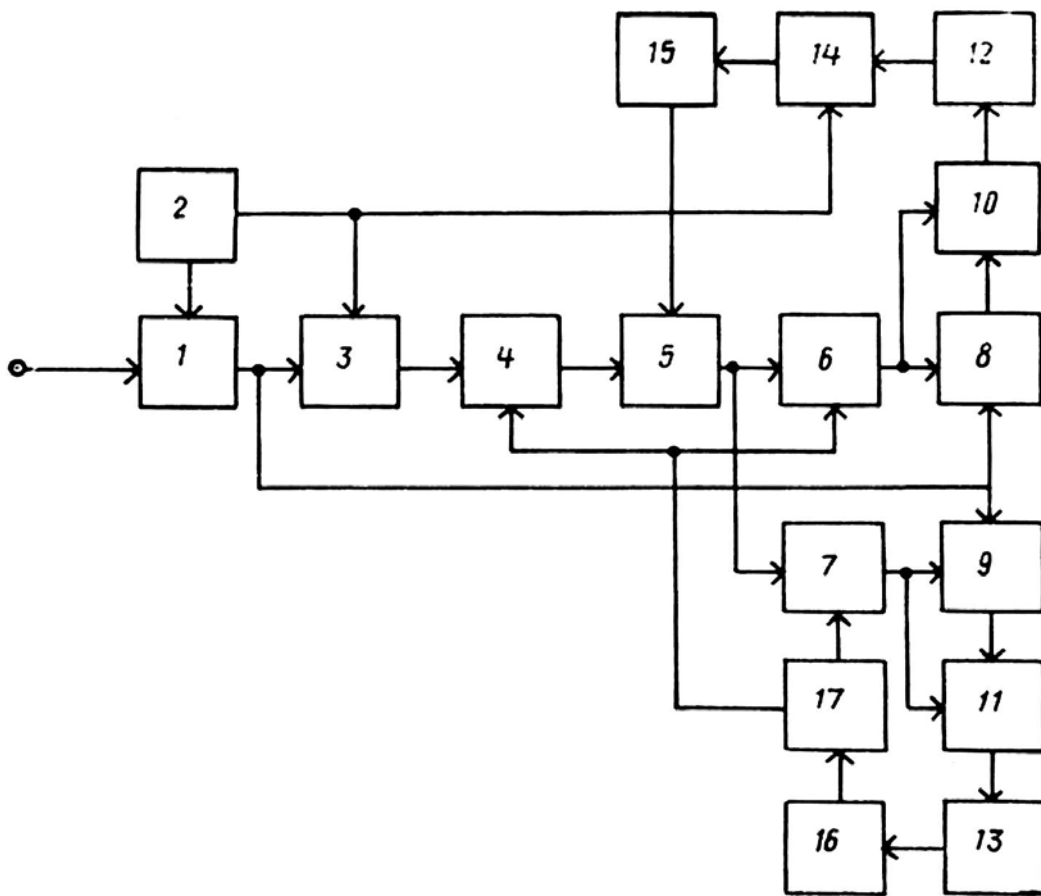


Рисунок 2.11. Коррелометр с аппроксимацией экспоненциально-косинусной моделью

Как следует из рисунков 2.9-2.11, каналы регулирования взаимосвязаны, процесс уравнивания затруднен, в схеме имеется значительное число регулируемых элементов.

От ряда недостатков можно избавиться, если параметр затухания модели определять по минимуму квадратической погрешности также, как и для аппроксимирующей функции $e^{-\alpha|\tau|}$, а частоту колебания корреляционной функции ω_0 - как для функций $\rho_{a5}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $\rho_{a6,7}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \pm \sin \omega_0 |\tau|)$.

Алгоритм определения параметров модели заключается в следующем [87]. При поступлении на вход коррелометра реализации стационарного случайного процесса значение первого параметра α^* , определяемое в первом канале, устанавливается во втором фильтре. Затем определяется частота колебаний ω_0^* во втором канале.

Из рис. 2.6-2.11 видно, что одним из основных элементов схемы являются фильтры с регулируемыми параметрами, импульсные характеристики $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ которых полностью определяются выбранными аналитическими выражениями корреляционных функций [50, 87]. Таким образом, задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций сводится, в основном, к синтезу этих фильтров. В таблице 2.2 приведены, для примера, импульсные характеристики фильтров с регулируемыми параметрами для типовых аппроксимирующих моделей нормированных корреляционных функций, а в таблице 2.3 – их передаточные функции.

Импульсные характеристики для типовых аппроксимирующих выражений КФ

Таблица 2.2

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$h_i(\tau, \alpha, \omega_0)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$4\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau}$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$1,6\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$
3	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$	$16\alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau} - 8\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau}$
4	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8}{21}\alpha^3 \tau^2 e^{-\alpha\tau} + \frac{8}{21}\alpha^4 \tau^3 e^{-\alpha\tau}$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau $	$\frac{8\alpha^2(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{2\alpha^4 + \alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \tau e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau$
		$\frac{4(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha\omega_0} \tau \sin \omega_0 \tau$
6	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{8\alpha^2(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{5\alpha^4 - 2\alpha^2\omega_0^2 + \omega_0^4} \left[\tau e^{-\alpha\tau} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau) - \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_0 \tau \right]$
		$\frac{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2}{\alpha\omega_0} e^{-\alpha\tau} \left[\frac{\alpha\tau}{\omega_0} \cos \omega_0 \tau - \left(\tau + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \right) \sin \omega_0 \tau \right]$

Передаточные функции фильтров с регулируемыми параметрами

Таблица 2.3

№	$\rho_x(\tau, \alpha, \omega_0)$	$W(p, T, k)$
1	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{4}{(1+Tp)^2}$
2	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$	$\frac{3,2}{(1+Tp)^3}$
3	$e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$	$\frac{16Tp}{(1+Tp)^3}$
4	$e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau +\alpha^2\tau^2/3)\tau$	$\frac{16(4+Tp)}{21(1+Tp)^4}$
5	$e^{-\alpha \tau } \text{Cos}\omega_0\tau$	$\frac{8(k+1)}{k} \left[\frac{1}{1+k \frac{1}{(1+Tp)^2}} \right]^2 \times$ $\times \left[\left(\frac{Tp}{1+Tp} \right)^2 - (1+k) \frac{1}{(1+Tp)^2} \right];$ $8(k+1) \left[\frac{1}{1+k \frac{1}{(1+Tp)^2}} \right]^2 \frac{1}{1+Tp};$
6	$e^{-\alpha \tau } (\text{Cos}\omega_0\tau + \alpha/\omega_0 \text{Sin}\omega_0\tau)$	$8(k+1) \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{Tp}{1+Tp};$ $\frac{1}{\left[1+k \frac{1}{(1+Tp)^2} \right]^2} \frac{1}{(1+Tp)^3} \frac{1+Tp/2}{1+Tp};$

2.3. Анализ методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций

При аппроксимации корреляционных функций тем или иным аналитическим выражением возникает задача оценки точности приближения. Решить её для самого общего случая при произвольном виде корреляционной функции не представляется возможным. Поэтому наиболее целесообразно определять относительные методические погрешности аппроксимации для конкретных видов корреляционной функции, выбранных моделей [87, 96]:

$$\delta = \frac{\int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)]^2 d\tau}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau}. \quad (2.24)$$

Задача имеет простое решение в случае аппроксимации однопараметрических нормированных корреляционных функций исследуемых процессов вида $\rho_{x1}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$, $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$, $\rho_{x3}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$, $\rho_{x4}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau| + \lambda^2\tau^2/3)$, $\rho_{x5}(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau}$ и т.д. [77].

Для этого необходимо: решить систему уравнений (2.15), определить оптимальное значение параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, затем, подставив их в формулу (2.24), найти численное значение δ .

Определим оптимальное значение параметра модели $\rho_{a1}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ α и погрешность аппроксимации полосового шума с нормированной корреляционной функцией $\rho_{x5}(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau}$. Подставив $\rho_{x5}(\tau)$ и $h(\tau, \alpha) = 4\alpha^2\tau e^{-\alpha\tau}$ в (2.20), получим:

$$4\alpha^2 \int_0^{\infty} \tau e^{-\alpha\tau} \frac{\sin \Delta\omega_3\tau}{\Delta\omega_3\tau} d\tau - 1 = 0. \quad (2.25)$$

Произведя все необходимые преобразования, определим:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta\omega_3. \quad (2.26)$$

Определим методическую погрешность аппроксимации. Для этого необходимо подставить $\rho_{x5}(\tau)$ и $\rho_{a1}(\tau)$ в (2.24) и произвести все необходимые преобразования. Окончательно получим:

$$\delta = 1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega_3}{\alpha} + \frac{\Delta\omega_3}{\alpha\pi}. \quad (2.27)$$

С учётом (2.26) $\delta=0,22$.

Аналогично определяются оптимальные значения параметров и погрешности аппроксимации в других случаях, результаты расчётов которых представлены в таблице 2.4.

Оптимальные значения параметров и погрешности аппроксимации
корреляционных функций параметрическими моделями

Таблица 2.4

Вид модели	$\rho_x(\tau)$	Параметр	δ
$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = \lambda$	0
	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)$	$\alpha = 0,467 \lambda$	0,06
	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau)$	$\alpha = 2,75 \lambda$	0,16
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta\omega_3$	0,22
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau)$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = 2,14 \lambda$	0,06
	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau)$	$\alpha = \lambda$	0
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 1,22 \Delta\omega_3$	0,21
$e^{-\alpha \tau }(1 - \alpha \tau)$	$e^{-\lambda \tau }$	$\alpha = 0,365 \lambda$	0,16
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 0,3 \Delta\omega_3$	0,17
$e^{-\alpha \tau }(1 + \alpha \tau + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = 1,45 \Delta\omega_3$	0,14
$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$	$\alpha = \Delta\omega_3 / 3$ $\omega_0 = \sqrt{2} \Delta\omega_3 / 3$	0,136

При аппроксимации корреляционных функций многопараметрическими моделями задача усложняется, так как приходится решать системы алгебраических уравнений высокого порядка. Для определения оптимальных параметров и методических погрешностей аппроксимации корреляционных функций $\rho_{x6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$,

$$\rho_{x7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \quad \rho_{x8}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

функцией $e^{-\alpha|\tau|}$ при различных $\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$ были составлены программы для ЭВМ, и проведен счёт, результаты которого представлены на рис. 2.12 а) - зависи-

мость относительного параметра модели $x = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} = \varphi(\gamma)$, рис. 2.12 б)- методи-

ческая погрешность аппроксимации $\delta = \psi(\gamma)$. На рис. 2.13 приведены аналогичные результаты для модели $e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$. На рис. 2.12 ряд1 отражает результаты расчёта