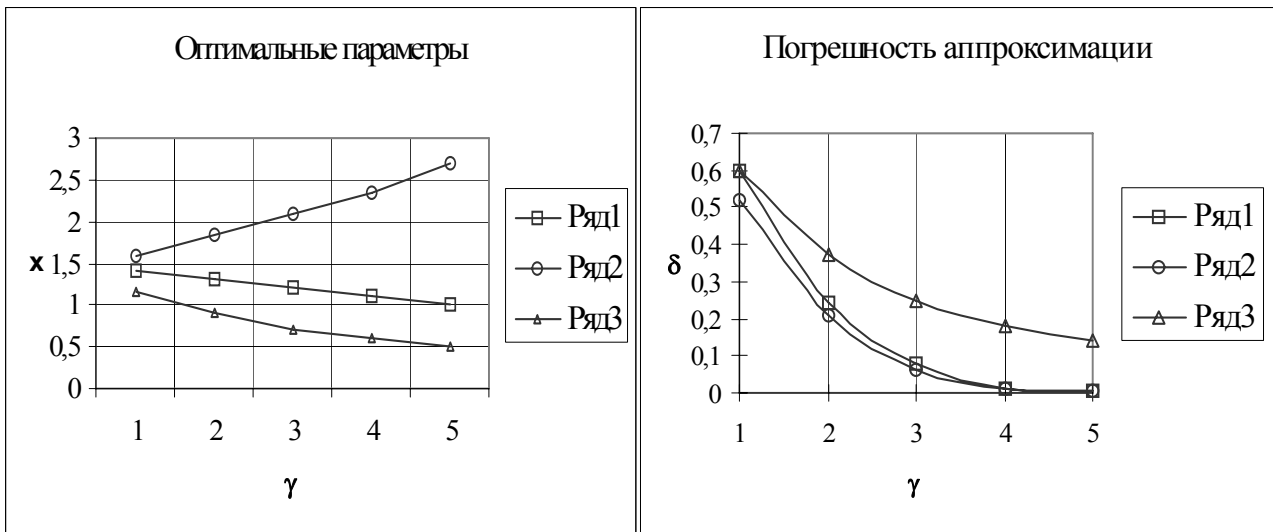


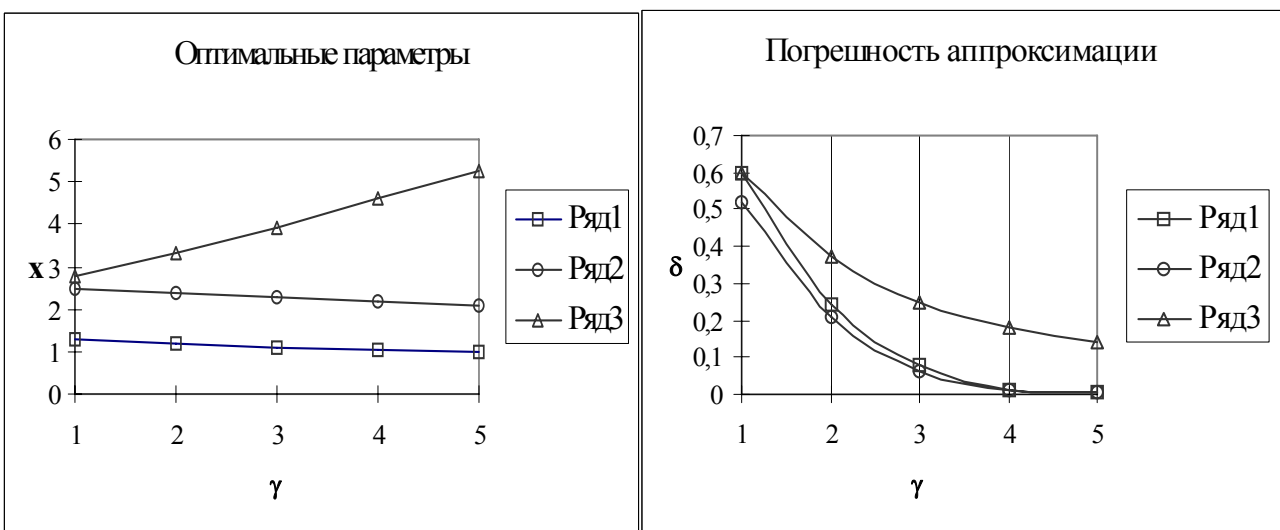
для $\rho_{x_6}(\tau)$, ряд 2 - $\rho_{x_8}(\tau)$, ряд 3 - $\rho_{x_7}(\tau)$. На рис. 2.13 ряд1 - $\rho_{x_7}(\tau)$, ряд 2 - $\rho_{x_6}(\tau)$, ряд 3- $\rho_{x_8}(\tau)$.



а)

б)

Рисунок 2.12.



а)

б)

Рисунок 2.13.

Из анализа графических зависимостей и результатов табл. 2.4 видно, что погрешности аппроксимации существенно зависят от вида модели корреляционной функции исследуемого процесса и соотношения её параметров. При этом, во многих практических случаях возможно с достаточной степенью точности аппроксимировать корреляционную функцию широкополосных случайных процессов функциями вида $e^{-\alpha|\tau|}$, $e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$. При аппроксимации корреляционных функций узкополосных процессов необходимо применять более сложные аналитические выражения, например: $e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

2.4. Анализ статистических погрешностей аппроксимации корреляционных функций

При построении аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов функциями заданного вида одной из важнейших задач является выбор параметров сглаживающих устройств, обеспечивающих допустимые статистические погрешности.

Выберем в качестве модели однопараметрическую функцию $\rho_a(\tau, \alpha)$ [51, 87]. Для определения ее параметра необходимо решить уравнение:

$$M \left[\overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t) \right] = 0. \quad (2.28)$$

Введем обозначение:

$$y(t) = \overset{\circ}{x}(t) \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau) d\tau - \overset{\circ}{x}^2(t). \quad (2.29)$$

В качестве оценки математического ожидания сигнала $y(t)$ примем сигнал на выходе ФНЧ (см. рис. 2.7) с импульсной характеристикой $h_1(\tau) = \frac{1}{T_\phi} e^{-\frac{\tau}{T_\phi}}$, где T_ϕ - постоянная времени фильтра.

Тогда

$$M^*[y(t)] = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) y(t - \tau_1) d\tau_1 = \varphi(\alpha). \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) зависит от оцениваемого параметра α . Учитывая, что полоса пропускания ФНЧ $\Delta\omega_\phi$ значительно уже эквивалентной ширины спектра мощности сигнала $\overset{\circ}{x}(t)$ $\Delta\omega_c$ и полосы пропускания фильтра с регулируемыми параметрами $\Delta\omega_1$, разложим (2.30) в ряд Тейлора в окрестности оптимального параметра α_0 , ограничившись при этом линейными членами:

$$\varphi(\alpha_0) + \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha^* - \alpha_0) = 0, \quad (2.31)$$

где α^* - оценка параметра.

Отсюда

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.32)$$

Из выражений (2.30), (2.32) видно, что α^* является случайной величиной. Требования, предъявляемые к оценке α^* , сводятся к выполнению следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{см} = \frac{M[\alpha^*] - \alpha_0}{\alpha_0} \leq \gamma_{см \text{ доп}} \\ \gamma_M = \sqrt{\frac{D[\alpha^*]}{\alpha_0^2}} \leq \gamma_{M \text{ доп}} \end{array} \right., \quad (2.33)$$

где $\gamma_{\text{см}}$ - погрешность от смещенности оценки;

$\gamma_{\text{м}}$ - методическая статистическая погрешность;

$\gamma_{\text{см доп}}, \gamma_{\text{м доп}}$ - допустимые значения погрешностей.

Разложим (2.32) в ряд Тейлора по $\varphi(\alpha_0)$ и $\varphi'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$ в окрестностях $M[\varphi(\alpha_0)]$ и $M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}$, ограничившись линейными членами. С учётом (2.28) и (2.30), получим;

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha)}{M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.34)$$

Для определения методических статистических погрешностей $\gamma_{\text{м}}$ необходимо найти дисперсию оценки α^* :

$$D[\alpha^*] = \frac{M[\varphi^2(\alpha)]}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.35)$$

С учётом (2.29) и (2.30) числитель в выражении (2.35) равен:

$$\begin{aligned} M[\varphi^2(\alpha_0)] = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau, \alpha) h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h(\tau_3, \alpha) M \left[\overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \times \right. \\ & \left. \times \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \right] d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) h(\tau, \alpha) \times \\ & \left. \times M \left[\overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \right] d\tau d\tau_1 + \sigma_x^4. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для определения $M[\varphi^2(\alpha_0)]$ необходимо найти центральный момент четвертого порядка $M \left[\overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \right]$. Решим эту задачу для нормальных случайных процессов. В этом случае следующая связь центрального момента четвертого порядка с моментами второго порядка [82]:

$$\begin{aligned} M \left[\overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_3 - \tau_2) \right] = & \sigma_x^4 [\rho_x(\tau_2 - \tau_1) \rho_x(\tau_3 + \tau_2 - \tau - \tau_1) + \\ & \rho_x(\tau_3 + \tau_2 - \tau_1) \rho_x(\tau_2 - \tau - \tau_1) + \rho_x(\tau) \rho_x(\tau_3)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подставив (2.37) в (2.36) и произведя ряд преобразований, получим:

$$\begin{aligned} M[\varphi^2(\alpha_0)] = & \sigma_x^4 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{хн}}(\omega_1) S_{\text{хн}}(\omega) |W_1[j(\omega + \omega_1)]|^2 |W(j\omega)|^2 d\omega d\omega_1 + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{хн}}(\omega_1) S_{\text{хн}}(\omega) |W_1[j(\omega + \omega_1)]|^2 W(-j\omega_1) W(j\omega) d\omega d\omega_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $S_{xH}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ - нормированная спектральная плотность мощности

процесса $\overset{\circ}{x}(t)$;

$W(j\omega)$ - частотная характеристика фильтра с регулируемыми параметрами;

$W_1(j\omega)$ - частотная характеристика ФНЧ.

Приняв во внимание, что $\Delta\omega_c \gg \Delta\omega_\phi$, выражение (2.38) преобразуем к виду:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 4\sigma_x^4 \Delta\omega_\phi \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}^2(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.39)$$

Для упрощения расчетов возможно указать несколько оценок сверху выражения (2.39).

1 оценка сверху:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 26\sigma_x^4 \frac{\Delta\omega_\phi \Delta\omega_1}{\Delta\omega_{c2}^2} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (2.40)$$

где $\Delta\omega_{c2} = \frac{\int_0^\infty S_{xH}(\omega) d\omega}{S_{xH}(\omega)_{\max}}$ - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала $\overset{\circ}{x}(t)$.

2 оценка сверху:

$$M[\varphi^2(\alpha_0)] \leq 2\sigma_x^4 \frac{\Delta\omega_\phi \Delta\omega_{c4}}{\Delta\omega_{c2}^2} |W(j\omega)|_{\max}^2, \quad (2.41)$$

где $\Delta\omega_{c4} = \frac{\int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) d\omega}{S_{xH}^2(\omega)_{\max}}$ - эквивалентная ширина спектра мощности сигнала $\overset{\circ}{x}(t)$.

Знаменатель в (2.35) равен:

$$M^2[\varphi'(\alpha)]_{|\alpha=\alpha_0} = \left[\sigma_x^2 \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2. \quad (2.42)$$

Таким образом, первая оценка сверху выражения (2.35) меньше или равна:

$$D_1[\alpha^*] \leq \frac{2\Delta\omega_\phi \Delta\omega_1 |W(j\omega)|_{\max}^2}{\Delta\omega_{c2}^2 \left[\int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2}. \quad (2.43)$$

Вторая оценка сверху:

$$D_2[\alpha^*] \leq \frac{2\Delta\omega_\phi \Delta\omega_{c4} |W(j\omega)|_{\max}^2}{\Delta\omega_{c2}^2 \left[\int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]_{|\alpha=\alpha_0}^2}. \quad (2.44)$$

Учитывая соотношения неопределенности [96]:

$$\tau_k^{(4)} \frac{\Delta\omega_{c2}^2}{\Delta\omega_{c4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \text{ и } \Delta\omega_1 T_\phi = \frac{\pi}{2}, \quad (2.45)$$

можно показать, что 1 оценка сверху $D_1[\alpha^*]$ является более завышенной $D_1[\alpha^*] = \frac{\pi}{2} D_2[\alpha^*]$. Поэтому, для определения γ_m целесообразнее воспользоваться второй оценкой сверху $D_2[\alpha^*]$.

Тогда

$$\gamma_{m2} = \sqrt{\frac{D_2[\alpha^*]}{\alpha_0^2}} \leq C_1 \sqrt{\frac{\tau_k^{(4)}}{T_\phi}}, \quad (2.46)$$

где

$$C_1 = \frac{2|W(j\omega)|_{\max}}{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}\alpha_0} \int_0^\infty \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.47)$$

Величина C_1 , для разных видов $\rho_x(\tau)$ и соотношений их параметров $\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}$, представлена в таблице 2.5. Из формулы (2.46) и результатов таблицы 2.5 видно, что методические статистические погрешности зависят как от вида $\rho_x(\tau)$ и γ , так и от отношения $\frac{\tau_{k4}}{T_\phi}$.

При определении погрешности от смещенности по формуле (2.34) оценка получается несмещенной. Разложив (2.34) в ряд Тейлора по $\varphi(\alpha_0)$ и $\varphi'(\alpha)|_{\alpha=\alpha_0}$ в окрестностях $M[\varphi(\alpha_0)]$ и $M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}$, ограничившись квадратичными членами, получим:

$$\alpha^* = \alpha_0 - \frac{\varphi(\alpha_0)}{M[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}} + \frac{\varphi(\alpha_0)\varphi'(\alpha)}{M^2[\varphi'(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (2.48)$$

Погрешность от смещенности, в соответствии с (2.33), будет равна:

$$\gamma_{см} \approx \frac{M[\varphi(\alpha_0)\varphi'(\alpha)]}{M^2[\varphi'(\alpha)]\alpha_0} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (2.49)$$

С учётом допущений, принятых при выводе формул (2.43)-(2.45) и выражения (2.42), погрешность от смещенности приведем к виду:

$$\gamma_{см} \leq C_2 \frac{\tau_{k4}}{\tau_k^{(4)}}, \quad (2.50)$$

где

$$C_2 = \frac{\operatorname{Re}[W(j\omega)]_{\max} \operatorname{Re}[W_2(j\omega)]_{\max}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha_0 \left[\int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \rho_x(\tau) d\tau \right]^2}_{|\alpha=\alpha_0}, \quad (2.51)$$

а

$$W_2(j\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\partial h(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.52)$$

В таблице 2.5 приведены численные значения C_2 для различных $\rho_x(\tau)$ и γ . Из анализа выражений (2.50), (2.51) и результатов представленных в таблице 2.5, видно, что погрешность от смещенности, как и методическая, зависит от вида $\rho_x(\tau)$, γ и отношения $\frac{\tau_{k4}}{T_\phi}$, но выбором постоянной времени ФНЧ всегда возможно обеспечить допустимые статистические погрешности.

К анализу статистических погрешностей

Таблица 2.5

$\rho_a(\tau, \alpha)$	$\rho_x(\tau)$	$\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$	C_1	C_2
$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\lambda \tau }$		7,2	2,45
	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	0	2,4	0,28
		0,25	3,2	0,5
		0,5	4,2	0,8
		0,75	6,2	1,8
		1	7,2	2,45
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$		4,8	1,1
$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$e^{-\lambda \tau }$		6	2,8
	$\frac{\sin \Delta\omega_3 \tau}{\Delta\omega_3 \tau}$		1,2	0,11

2.5 Влияние неточности оценки параметров модели на погрешность аппроксимации корреляционных функций

Минимальное значение погрешности аппроксимации, определяемое по формуле (2.14), будет достигнуто тогда, когда все элементы аппаратуры идеальны, а параметры модели определены оптимально [87]. В реальных же условиях оценка параметров модели сопровождается аппаратурными погрешностями, которые, в конечном счете, приводят к увеличению методических погрешностей аппроксимации. В связи с этим необходимо оценить влияние неточности определения параметров аппроксимирующей функции на погрешность аппроксимации.

Для этого разложим (2.14) в ряд Тейлора в окрестностях оптимальных параметров α_{i0} . Так как при аппроксимации нормированной корреляционной функции требуется, в основном, определять два параметра: α - показатель затухания и ω_0 - частоту колебания корреляционной функции, то, не снижая общности рассуждения, разложим (2.14) в ряд Тейлора по двум параметрам, ограничившись квадратичными членами:

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta(\alpha_0 + \omega_0) + \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0) + \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} (\alpha - \alpha_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} (\alpha - \alpha_0)(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (2.53)$$

После нахождения производных в выражении (2.53), необходимо в них подставить $\alpha = \alpha_0$ и $\omega = \omega_0$. Учитывая выражения (2.15),

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \Delta(\alpha, \omega)}{\partial \omega} = 0 \end{cases},$$

а $\Delta(\alpha_0, \omega_0) = \Delta_{\min}$.

Подставив в (2.53) выражение (2.14) и произведя ряд промежуточных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \Delta - \Delta_{\min} = (\alpha - \alpha_0)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau \right\} + (\omega - \omega_0)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau \right\} + \\ + (\alpha - \alpha_0)(\omega - \omega_0) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau + \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau \right\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Найдем относительное изменение погрешности аппроксимации от неточности оценки параметров:

$$\gamma^* = \frac{\Delta - \Delta_{\min}}{\Delta_{\min}} = \frac{\Delta - \Delta_{\min}}{\tau_k^{(4)} \delta}. \quad (2.55)$$

где δ - относительная методическая погрешность аппроксимации.

С учётом (2.55) выражение (2.54) примет вид:

$$\begin{aligned} \gamma^* = \frac{1}{\tau_k^{(4)}} \left\{ \alpha_0^2 \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha^2} d\tau \right\} + \omega_0^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha} \right]^2 d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \omega^2} d\tau \right\} + \right. \\ \left. + \alpha_0 \omega_0 \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau + \int_0^\infty \rho_a(\tau, \alpha, \omega) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^\infty \rho_x(\tau) \frac{\partial^2 \rho_a(\tau, \alpha, \omega)}{\partial \alpha \partial \omega} d\tau \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Методическая погрешность аппроксимации в этом случае равна:

$$\delta^* = \delta(1 + \gamma^*). \quad (2.57)$$

Исследования, проведенные в [87], показали, что неточность определения параметров аппроксимирующего выражения в 10 - 20 % незначительно увеличивает погрешность аппроксимации. Причём, чем больше погрешность аппроксимации, тем менее чувствительна она к неточности оценки параметров и наоборот. Это обстоятельство, в свою очередь, снижает требования к аппаратуре.

Так, например, при аппроксимации нормированной корреляционной функции $\rho_x(\tau) \frac{\sin \Delta \omega_3 \tau}{\Delta \omega_3 \tau}$ моделью $\rho_a(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

$$\gamma^* = 1,07 \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)^2 + 4,80 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 + 0,52 \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right). \quad (2.58)$$

Из полученного выражения видно, что неточность оценки частоты колебания корреляционной функции больше влияет на увеличение методической погрешности аппроксимации и, следовательно, её необходимо точнее оценивать.

2.6. Принципы построения основных блоков коррелометров с аппроксимацией

Выбор основных блоков коррелятора с аппроксимацией зависит от предъявляемых к нему требований. Требования простоты аппаратурной реализации и работы в реальном масштабе времени приводят к разработке специализированных аналоговых или аналого-цифровых вычислительных устройств [87], решающих систему уравнений (2.20).

Основными блоками коррелятора с аппроксимацией являются фильтры с регулируемыми параметрами, множительные, вычитающие устройства, центрирующий и усредняющий фильтры.

Как показано в [50], задача создания устройств для аппроксимации корреляционных функций заданного вида сводится, в основном, к синтезу фильтров с регулируемыми параметрами с импульсными характеристиками $h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (2.19), полностью определяемыми выбранным аналитическим выражением. Предъявляемые к ним требования заключаются в минимуме регулируемых элементов, простоте технической реализации, использовании типовых элементов и блоков. Из таблицы 2.3 видно, что фильтры с регулируемыми параметрами состоят из более простых фильтров с передаточными функциями:

$$W_1(p) = \frac{1}{1 + Tp}; W_2(p) = \frac{Tp}{1 + Tp}; W_3(p) = \frac{Tp/2}{1 + Tp}, \quad (2.59)$$

где $\alpha = 1/T$, $\omega_0 = \sqrt{k}/T$,

и усилителей с постоянными и переменными коэффициентами усиления.

Фильтры легко могут быть реализованы базе RC-цепей в сочетании с операционными усилителями в интегральном исполнении, охваченными отрицательной обратной связью.

При построении коррелометров с аппроксимацией двухпараметрическими моделями $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, $e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$ требуется синтезировать фильтры

с импульсными характеристиками вида:

$$\begin{cases} h_1(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau \\ h_2(\tau) = h(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{cases}, \quad (2.60)$$

где $h(\tau)$ - импульсная характеристика физически реализуемого фильтра.

Исследования показали, что фильтры с импульсными характеристиками (2.60) могут быть синтезированы следующим образом (см. рис. 2.14).

Рассмотрим подробнее схему, представленную на рис. 2.14 а). Выходные сигналы с выходов фильтров с импульсной характеристикой $h(\tau)$ в установившемся режиме будут равны:

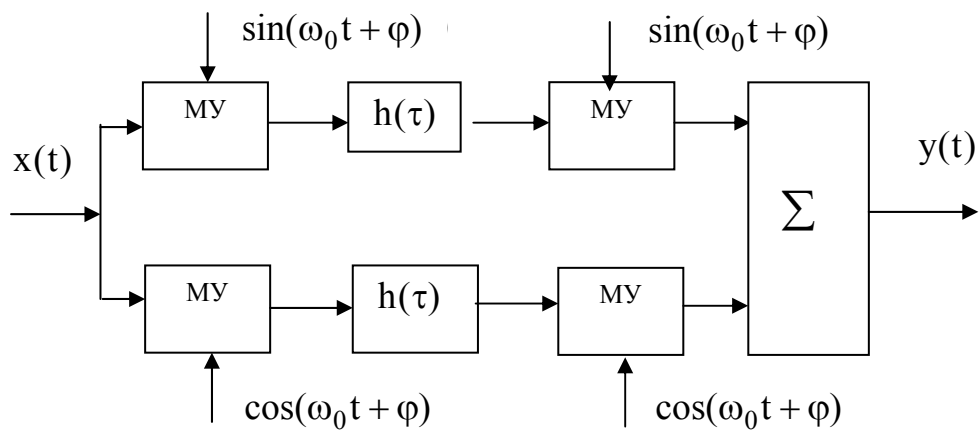
$$\begin{cases} y_1(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) \sin[\omega_0(t-\tau) + \varphi] \sin(\omega_0 t + \varphi) h(\tau) d\tau; \\ y_2(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) \cos[\omega_0(t-\tau) + \varphi] \cos(\omega_0 t + \varphi) h(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (2.61)$$

Сигнал на выходе сумматора

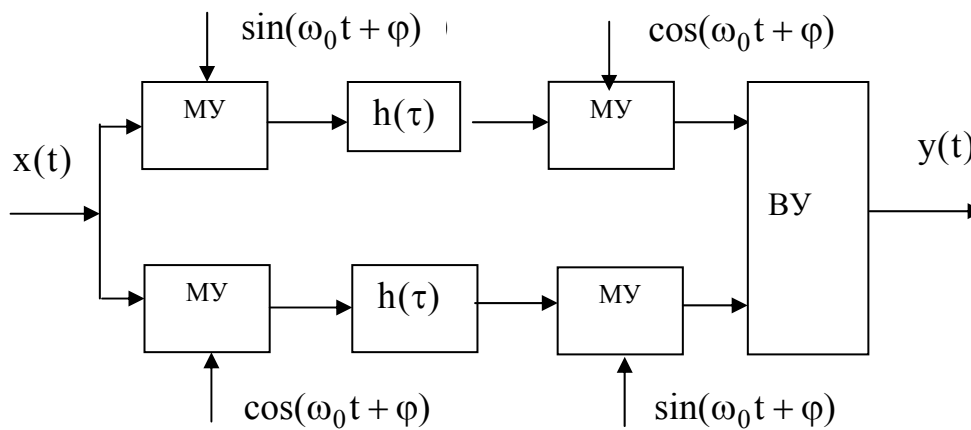
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega_0 \tau x(t-\tau) d\tau$$

в установившемся режиме описывает процесс на выходе линейного звена с импульсной характеристикой $h_1(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau$.

Аналогично можно показать, что импульсная характеристика фильтра (см. рис. 2.14 б)) равна выражению $h_2(\tau) = h(\tau) \sin \omega_0 \tau$.



a)



б)

Рисунок 2.14. Фильтры с регулируемыми параметрами

Определив требования, предъявляемые к фильтрам с регулируемыми параметрами, рассмотрим остальные элементы.

Для центрирования процесса и получения интересующих оценок необходимы центрирующий фильтр, например, с передаточной функцией $W_{\text{ц}}(p) = \frac{T_{\text{ц}}p}{1 + T_{\text{ц}}p}$ и

сглаживающий фильтр, например, фильтр нижних частот с $W_{\text{ф}}(p) = \frac{T_{\text{ф}}p}{1 + T_{\text{ф}}p}$. Вопро-

сы построения этих фильтров, расчёт их параметров для обеспечения допустимых аппаратных и статистических погрешностей рассматриваются в [87]. Блок-схемы центрирующего фильтра и фильтра нижних частот аналогичны блок-схемам фильтров с регулируемыми параметрами. Единственное отличие заключается в том, что постоянные времени $T_{\text{ц}} \gg \tau_k$, $T_{\text{ф}} \gg \tau_k$ [87].

В качестве вычитающих устройств, усилителей с постоянными и переменными коэффициентами усиления также возможно применение операционных усилителей в интегральном исполнении [87].

Таким образом, все блоки коррелометра, кроме множительного устройства, могут быть выполнены на одной элементной базе - операционных усилителях в инте-

гральном исполнении. От выбора множительного устройства существенным образом зависит частотный диапазон исследуемых сигналов, точность и простота технической реализации аппаратуры. Вопросам теории, расчёта множительных устройств и их применения для корреляционных измерений посвящен целый ряд работ. При этом, как правило, предпочтение отдается косвенным методам умножения, наиболее распространенным из которых является четырехкватратный метод [102]. Это объясняется тем, что, во-первых, получаемая точность умножения удовлетворяет требованиям корреляционных измерений, а во-вторых, множительные устройства такого типа выпускаются промышленностью и входят в состав аналоговых моделирующих установок.

Заметим, что при решении системы уравнений (2.21) при помощи аппаратуры необходимо индексировать равенство нулю корреляционных моментов [48]:

$$M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] = 0, \quad (2.63)$$

где

$$\overset{\circ}{y}_i(t) = \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\circ}{x}(t - \tau) - \overset{\circ}{x}(t). \quad (2.64)$$

Т. е. необходимо такое устройство, выходной сигнал которого был бы отличен от нуля при $M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] \neq 0$ и равнялся бы нулю при $M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}_i(t) \right] = 0$.

В общем виде блок-схема такого устройства должна включать в себя функциональный преобразователь с функцией преобразования $\psi \left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i \right)$ и фильтр нижних частот. Выходной сигнал фильтра нижних частот является оценкой математического ожидания сигнала $z(t)$:

$$\overset{\circ}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - m_x, y_i - m_{y_i}) f(x, y_i) dx dy_i = \gamma(K_{xy}). \quad (2.65)$$

Как видно из (2.65), вид функции $\gamma(K_{xy})$ зависит от типа функционального преобразователя и от вида совместной плотности распределения вероятностей $f(x, y_i)$.

Таким образом, для выполнения условия (2.63) необходимо, чтобы

$$\gamma(K_{xy}) = \begin{cases} 0, & \text{если } K_{xy} = 0; \\ c, & \text{если } K_{xy} \neq 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

где c - произвольная отличная от нуля величина.

Самый простой вид функции $\psi \left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i \right)$ может быть реализован множительным устройством. В этом случае условие (2.63) выполняется автоматически, независимо от вида $f(x, y_i)$. Но так как построение точного множительного устройства, особенно для достаточно широкого диапазона частот, представляет весьма сложную задачу, основное внимание сосредоточим на сравнительном анализе таких функциональных преобразователей, которые применяются для косвенных методов оценки корреляци-

онной функции. При этом необходимо иметь в виду, что в рассматриваемом случае абсолютно не важен вид $\gamma(K_{xy})$, как в корреляционном анализе [80], а важно лишь выполнение условия (2.63). Последняя оговорка существенна, т.к. расширяет класс функций $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}_i\right)$ и устройств, которые могут быть применены для этих целей.

Рассмотрим функцию $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}$, широко используемую при полярном методе анализа корреляционной функции [80]. В этом случае

$$\gamma(K_{xy}) = M\left[\text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}\right]. \quad (2.67)$$

Подставляя в (2.67) значения

$$\text{sign } \overset{\circ}{x} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju_1 \overset{\circ}{x}) \frac{du_1}{u_1} \text{ и } \text{sign } \overset{\circ}{y} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ju_2 \overset{\circ}{x}) \frac{du_2}{u_2}$$

и разлагая функции $\exp(ju_1 \overset{\circ}{x})$ по u_1 , а $\exp(ju_2 \overset{\circ}{x})$ по u_2 в ряд Маклорена, получим:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^{k+m}}{k! m!} M\left[\overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{y}^m\right] \beta_{k-1} \beta_{m-1}, \quad (2.68)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^{k-1} du_1 \\ \beta_{m-1} = \int_{-\infty}^{\infty} u_2^{m-1} du_2 \end{cases}. \quad (2.69)$$

Учитывая, что для чётных k и m , $\beta_{k-1} = \beta_{m-1} = 0$, выражение (2.68) можно переписать следующим образом:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(2k+1)! (2m+1)!} \beta_{2k} \beta_{2m} M\left[\overset{\circ}{x}^{2k+1} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right]. \quad (2.70)$$

Из формулы (2.70) видно, что условие (2.63) будет выполнено, если $M\left[\overset{\circ}{x}^{2k+1} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0$ при $M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0$. Это требование выполняется, например, если совместная плотность распределения вероятностей симметрична [48]. При этом,

$$M\left[\text{sign } \overset{\circ}{x} \text{ sign } \overset{\circ}{y}\right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{xy} \text{ не зависит от дисперсии входных сигналов } \sigma_x^2 \text{ и } \sigma_y^2.$$

Это обстоятельство особенно важно при построении автоматических коррелометров с аппроксимацией, так как в этом случае отпадает необходимость нормирования исследуемого процесса по среднеквадратическому отклонению.

Определим, при каких ограничениях, накладываемых на исследуемый процесс, будет выполняться условие (2.63), если в качестве функционального преобразователя применить преобразователь с

$$\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \left| \overset{\circ}{x+y} \right| - \left| \overset{\circ}{x-y} \right| = \left(\overset{\circ}{x+y}\right) \text{sign}\left(\overset{\circ}{x+y}\right) - \left(\overset{\circ}{x-y}\right) \text{sign}\left(\overset{\circ}{x-y}\right), \quad (2.71)$$

используемый при анализе корреляционной функций нормальных случайных процессов [70]. Для рассматриваемого функционального преобразователя

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} M\left[\left(\overset{\circ}{x+y}\right) \exp\left[ju\left(\overset{\circ}{x+y}\right)\right]\right] \frac{du}{u} - \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} M\left[\left(\overset{\circ}{x+y}\right) \exp\left[ju\left(\overset{\circ}{x+y}\right)\right]\right] \frac{du}{u}. \quad (2.72)$$

Поступим, как в первом случае и введем прежние обозначения. Тогда выражение (2.72) примет вид:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \beta_{2k} C_{2(k+1)}^{2m+1} M\left[\overset{\circ}{x}^{2(k-m)} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right], \text{ а условие (2.63) бу-}$$

дет выполнено, как и в предыдущем случае, если

$$M\left[\overset{\circ}{x}^{2(k-m)} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0 \text{ при } M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0. \quad (2.73)$$

Для другой важной функции $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{x} \text{sign} \overset{\circ}{y}$, применяемой при релейном методе оценки корреляционной функции [70], можно показать, что

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \beta_{2m} M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right], \quad (2.74)$$

а условие (2.63) будет выполнено, если

$$M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}^{2m+1}\right] = 0 \text{ при } M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right] = 0. \quad (2.75)$$

Сопоставляя критерий (2.75) с критериями (2.63) и (2.70), можно отметить, что условие (2.75) менее жесткое. Т.е. возможности применения функционального преоб-

разователя с $\psi\left(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}\right) = \overset{\circ}{x} \text{sign} \overset{\circ}{y}$ для индикации равенства нулю корреляционного момента более реальны.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $\overset{\circ}{x}(t) = A \sin \omega t$, а $\overset{\circ}{y}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

В этом случае $\gamma(K_{xy}) = \frac{2}{\pi} \cos \varphi$, т.е. пропорциональна корреляционному моменту.

2. Если совместный закон распределения $\overset{\circ}{x}$ и $\overset{\circ}{y}$ нормальный, то

$$\gamma(K_{xy}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x \rho_{xy}, \quad (2.76)$$

где $\rho_{xy} = \frac{M\left[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{y}\right]}{\sigma_x \sigma_y}$ – коэффициент корреляции.

3. Совместное распределение случайных процессов $\overset{\circ}{x}$ и $\overset{\circ}{y}$ описывается характеристической функцией:

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{\exp(-iu_1\sigma_x/\sqrt{2})\exp(-iu_2\sigma_y/\sqrt{2})}{\sqrt{(1-i\sqrt{2}\sigma_x u_1)(1-i\sqrt{2}\sigma_y u_2) + 2\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}u_1u_2}}. \quad (2.77)$$

Такой закон распределения имеет квадрат нормального случайного процесса. В этом случае

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{\sigma_x}{\pi\sqrt{2}}\rho_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jx/2}}{(1-jx)^{3/2}} dx, \quad (2.78)$$

т.е. прямопропорциональна ρ_{xy} .

4. совместная характеристическая функция случайных процессов $\overset{\circ}{x}$ и $\overset{\circ}{y}$ равна:

$$\varphi(u_1, u_2) = \exp \left[-\frac{1}{2}\sigma_x^2(u_1^2 + 2\rho_{xy}u_1u_2 + u_2^2) - \frac{1}{6}i\sigma_x^3K_a(u_1^3 + 3\rho_{xy}u_1^2u_2 + 3\rho_{xy}u_1u_2^2 + u_2^3) + \frac{1}{24}K_\varepsilon(u_1^4 + 4\rho_{xy}u_1^3u_2 + 6\rho_{xy}u_1^2u_2^2 + 4\rho_{xy}u_1u_2^3 + u_2^4) \right], \quad (2.79)$$

где K_a - коэффициент асимметрии, K_ε - коэффициент эксцесса.

Представим $\gamma(K_{xy})$ в виде:

$$\gamma(K_{xy}) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi(u_1, u_2)}{\partial u_1} \Big|_{u_1=0} du_2. \quad (2.80)$$

Подставляя в (2.80) выражения для характеристической функции, получим:

$$\gamma(K_{xy}) = \frac{\sigma_x}{\pi}\rho_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iK_a x/2 - K_\varepsilon x^2/6) \exp(-x^2/2 - iK_a x^3/6 + K_\varepsilon x^4/24) dx. \quad (2.81)$$

И снова наблюдается прямопропорциональность от ρ_{xy} .

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что применение любого из рассмотренных функциональных преобразователей для построения коррелометров с аппроксимацией функциями заданного вида при определенных ограничениях, накладываемых на исследуемый процесс, позволит упростить схему коррелометра, расширить его частотный диапазон. При этом наиболее предпочтителен функциональный преобразователь последнего типа.

3. АППАРАТУРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАГЕРРА

3.1. Основные понятия и определения

Одной из сложных задач, которую приходится решать при аппроксимации корреляционных функций, является выбор модели корреляционной функции. Решение этой задачи осуществляется на основе априорной информации о свойствах исследуемого процесса. В тех случаях, когда этих данных недостаточно, как подсказывает практика, наиболее целесообразно применять разложение корреляционной функции в ряд по той или иной системе ортогональных функций. Впервые этот метод предложил Д. Лампард [111]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера [79], согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau), \quad (3.1)$$

где β_k - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau)$ - семейство базисных функций, ортонормированных в интервале $(0, \infty)$ с весом $\mu(\tau)$.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ 1, & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Так как ряд сходится в интервале $(0, \infty)$, то коэффициенты разложения β_k в соответствии с [111] определяются выражением:

$$\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Хаара, Уолша и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Одной из распространенных систем ортогональных функций, широко применяемых в аппроксимативном корреляционном анализе, являются ортогональные функции Лагерра, определяемые выражением (см. приложение П.13):

$$L_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\alpha\tau/2}. \quad (3.4)$$

Ортогональные функции Лагерра удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) L_n(\tau, \alpha) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (3.5)$$

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (3.1). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели.

Тогда для модели корреляционной функции

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha), \quad (3.6)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (3.7)$$

определяются формулой:

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (3.8)$$

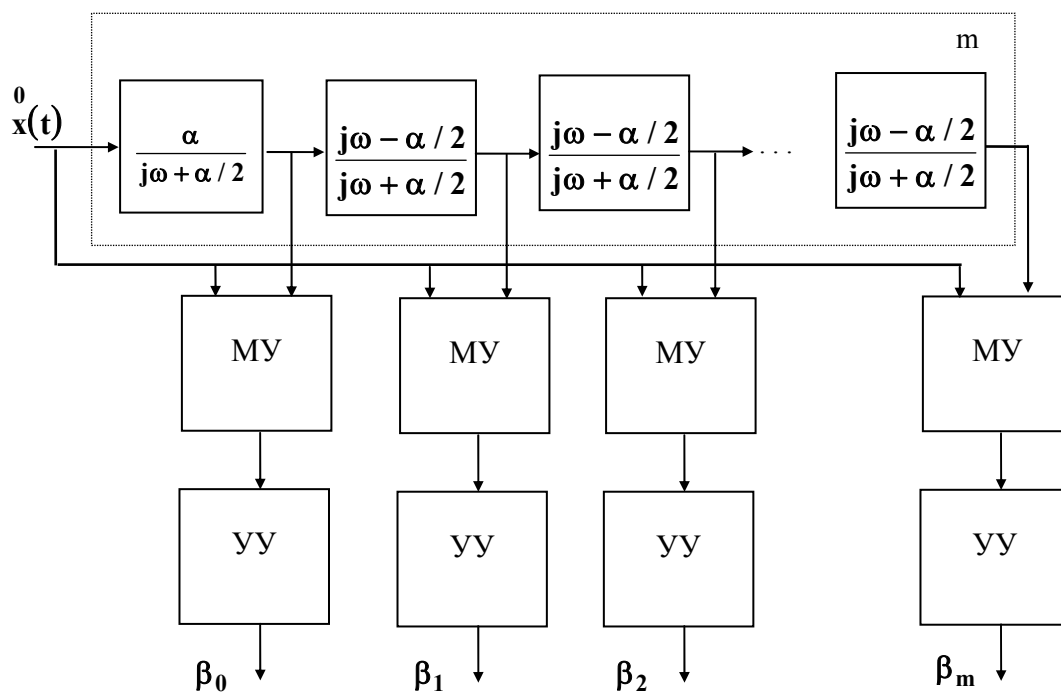


Рисунок 3.1. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Выражения для оценки коэффициентов разложения β_k для типовых моделей нормированных функций приведены в таблице 3.1.

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных функций Лагерра, равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (3.9)$$

Из результатов, представленных в таблице 3.1, и выражений (3.8) и (3.9) видно, что значения погрешности аппроксимации Δ и коэффициентов разложения β_k зависят от численного значения параметра α .

Как показали исследования, относительная погрешность аппроксимации

Коэффициенты разложения β_k для типовых моделей

Таблица 3.1

№	$\rho_x(\tau)$	β_k
1	$e^{-\lambda \tau }$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k$
2	$e^{-\alpha \tau } (1 + \lambda \tau)$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left\{ \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \times \frac{2\lambda + \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - \frac{k\alpha\lambda}{(\lambda + \alpha/2)^2} \right\}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau)$	$\frac{\alpha^2 / 2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left[\left(\frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right) + \frac{2k\lambda}{(\lambda + \alpha/2)} \right]$
4	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left(\frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left(\frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k$
5	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{\alpha}{2j\omega_0} \left\{ \frac{\lambda + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left(\frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k + \frac{\lambda - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left(\frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k \right\}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{\alpha}{2j\omega_0} \left\{ \frac{\lambda + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left(\frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k + \frac{\lambda - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left(\frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \right)^k \right\}$

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} \quad (3.10)$$

зависит от величины этого параметра, вида корреляционной функции и её показателя колебательности μ , числа членов разложения ряда m . На рис. 3.2 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ моделью (3.6) при $m=2$ в зависимости от отношения параметра функций Лагерра к показателю затухания исследуемых корреляционных функций - $\chi = \alpha/\lambda$. На рисунке 3.2 ряду 1 соответствуют значения погрешности при $\omega_0/\lambda = 5$, ряду 2 - 4, ряду 3 - 3.

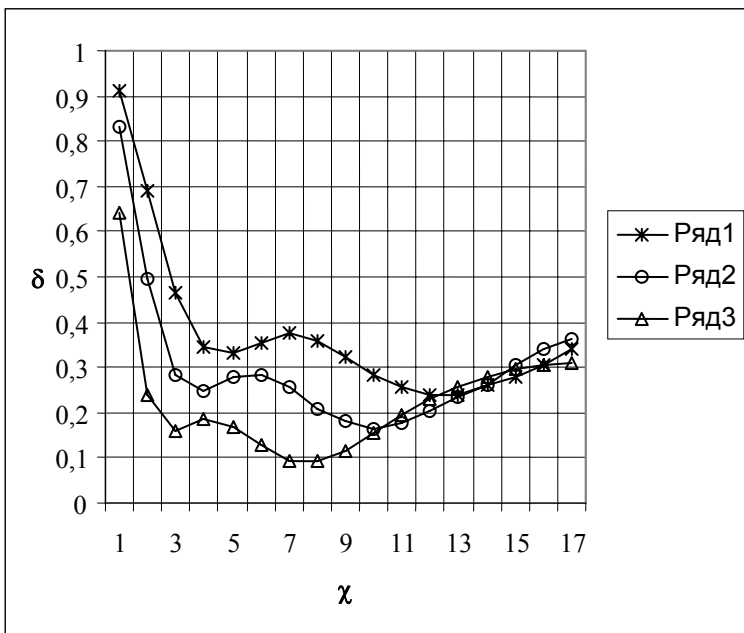


Рисунок 3.2. Методическая погрешность

Отсюда видно, что при выбранной модели корреляционной функции, $\mu = \text{const}$, $m = \text{const}$, погрешность существенно образом зависит от χ , т.е. α . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от m [87]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра α , обеспечивающего минимальную погрешность аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Для решения этой задачи требуется априорная информация о корреляционных (спектральных) свойствах исследуемого процесса. Это либо сведения о

его граничной частоте ω_b , либо о его корреляционной функции.

В первом случае величина параметра α определяется из соотношения [56]:

$$\alpha = 1 - 4 \omega_b. \quad (3.11)$$

Этот способ, не требуя дополнительных затрат, существенно увеличивает время анализа, так как при этом необходимо многократно определять корреляционную функцию. Кроме того, он не позволяет минимизировать погрешность аппроксимации.

Следующей попыткой явилось решение частной задачи определения величины α , минимизирующей погрешность равномерного приближения [96]

$$\delta = \left| K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right| = \min. \quad (3.12)$$

Для корреляционной функции вида $\sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ величина α определяется выражением:

$$\alpha = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (3.13)$$

Как следует из этого выражения, для определения искомого параметра необходимо знание λ и ω_0 , что, на наш взгляд, является избыточным. Знание параметров λ и ω_0 позволяет непосредственно представить искомую модель в виде $\sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Таким образом, необходимо разработать алгоритм поиска параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации.

3.2. Алгоритм оценки параметра функции Лагерра, обеспечивающий минимум квадратической погрешности аппроксимации

Предложенный в работах [50, 87] метод аппаратной аппроксимации корреляционных функций позволил свести задачу разработки алгоритма оценки параметра ортогональных функций Лагерра к задаче параметрической аппроксимации корреляционных функций [53].

Сделав в формуле (3.8) замену $K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$, получим:

$$\beta_k = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_k(j\omega) d\omega, \quad (3.14)$$

где

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} L_k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k = \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right) W_{k-1}(j\omega). \quad (3.15)$$

Подставив в формулу (3.7) выражение (3.14), найдем:

$$\Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) \left[\sum_{k=0}^m W_k(j\omega_1) W_k(j\omega_2) \right] d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.16)$$

С учетом (3.15) выражение для погрешности Δ примет вид:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) \frac{1 - \left[\frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^{m+1}}{j\omega_1 + j\omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.17)$$

Из полученной формулы видно, что при $\alpha = 0$ и при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

т.е. имеет наибольшее значение. Отсюда следует вывод, что существует значение α (хотя бы одно), при котором погрешность минимальна.

Условием минимума этой погрешности является следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.19)$$

при $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha^2} > 0$.

Из формулы (3.17), получим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -(m+1) \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 - \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\} \quad (3.20)$$

Представляя разность квадратов как произведение суммы оснований на разность, выражение (3.20) с учетом (3.15) приведем к виду:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -(m+1) \frac{1}{\alpha^2} \beta_m \beta_{m+1} \quad (3.21)$$

В результате условие минимума запишется так:

$$(m+1) \frac{1}{\alpha^2} \beta_m \beta_{m+1} = 0. \quad (3.22)$$

Проанализируем это уравнение. Коэффициенты $(m+1)$ и α отличны от нуля. Коэффициент β_m - последний коэффициент разложения в (3.6), также отличен от нуля. Следовательно, предлагаемый способ оценки оптимального значения параметра α , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, сводится к решению уравнения (см. рис. 3.3) [2]:

$$\beta_{m+1} = 0. \quad (3.23)$$

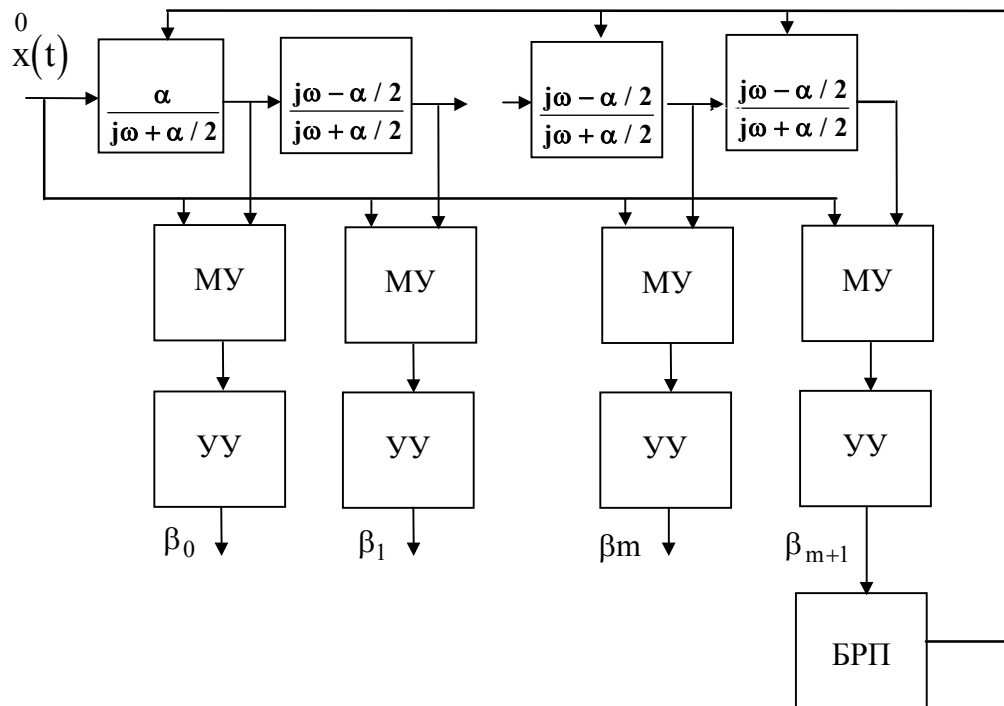


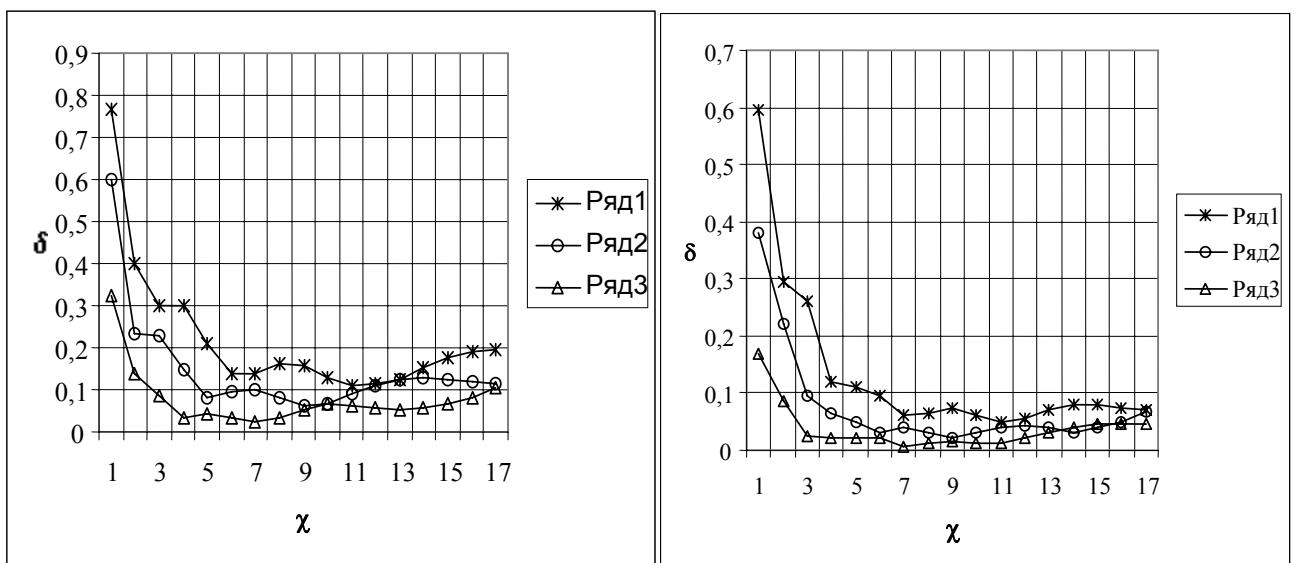
Рисунок 3.3. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с оптимальной подстройкой параметра фильтра

Результаты численного определения корней уравнения (3.23) и соответствующие им погрешности для $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ при показателе колебательности $\mu = 1, 2, \dots, 5$ и числе членов разложения ряда (3.6) $m=2, 4, 6$ приведены в приложении П.14. Для сравнения там же приведены результаты определения нормированного параметра $\chi = \alpha/\lambda$ по формуле (3.13) и соответствующие ему погрешности при аппроксимации той же модели.

На рис.3.4 а) и б) приведены результаты анализа погрешности аппроксимации корреляционной функции $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ с $\mu = 5$ при $m=4, 6$ для различных χ ,

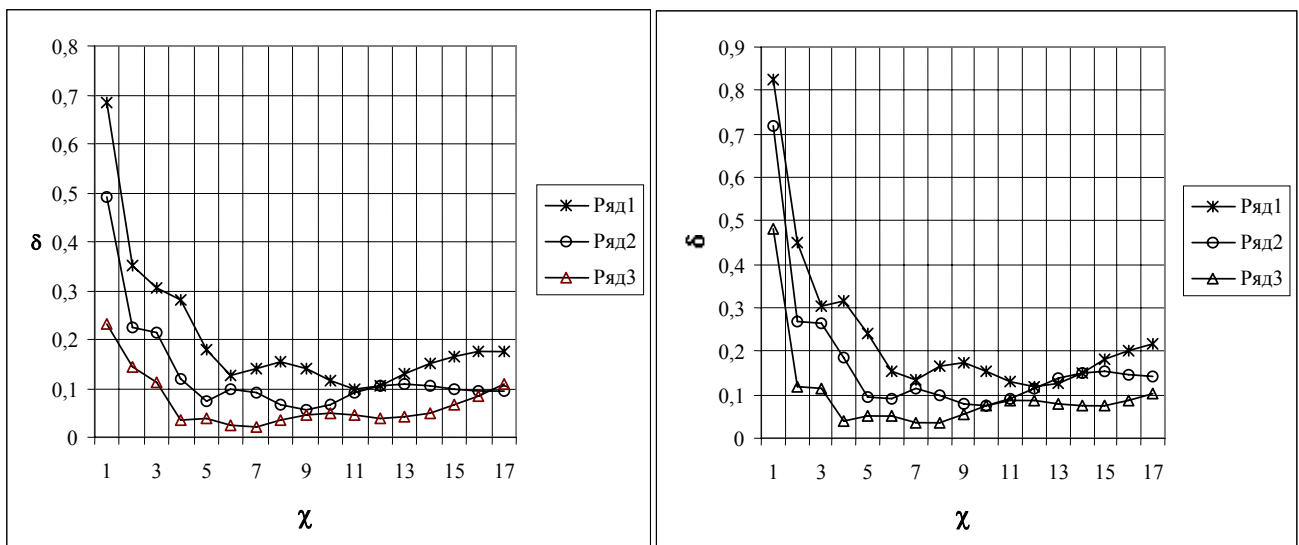
на рис. 3.4 в)- для $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$, $\mu = 5$, $m=4$, на рис. 3.4 г)-

$\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$, $\mu = 5$, $m=4$.



а)

б)



в)

г)

Рисунок 3.4. Методические погрешности аппроксимации

Ниже, на рис. 3.5 приведен пример аппроксимации $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ с $\mu=5$

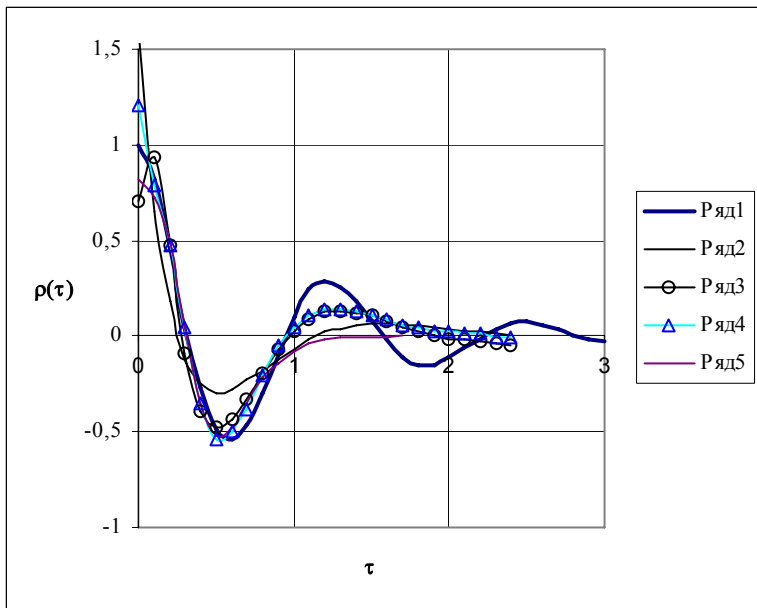


Рисунок 3.5. Результаты аппроксимации

(ряд 1) моделью (3.6) для $m=4$ при различных значениях $\chi = \alpha / \lambda$, определенных в результате решения уравнения (3.23):

- ряд 2 - $\chi = 2,860$;
- ряд 3 - $\chi = 6,425$
- ряд 4 - $\chi = 11,556$;
- ряд 5 - $\chi = 21,868$.

Из анализа результатов видно, что практически не выполняется основное свойство корреляционных функций - $K_x(\tau) > \sigma_x^2$, только один корень уравнения обеспечивает минимальную погрешность аппроксимации. Справедливо

возникает идея нормировки - разделить полученные ординаты модели на $\sum_{k=0}^m \beta_k$.

На рис. 3.6 приведены результаты аппроксимации после нормировки.

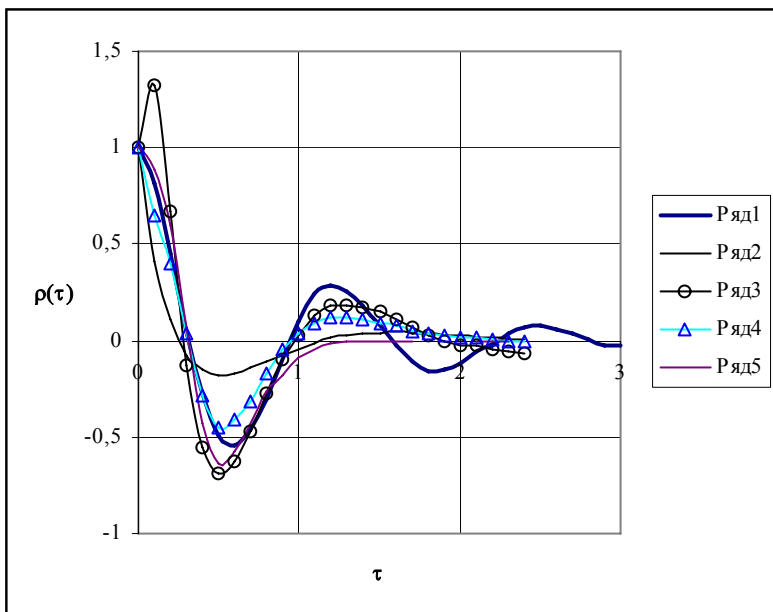


Рисунок 3.6. Результаты аппроксимации после нормировки

Из анализа рисунка 3.6 видно, что существуют такие значения параметра α , при которых нарушается основное свойство корреляционной функции, даже после нормировки.

Величина параметра α зависит от вида корреляционной функции, показателя её колебательности, а также числа членов разложения ряда. Число корней уравнения (3.23) зависит от тех же факторов и, в общем случае, равно $m+1$, и только один из них обеспечивает наименьшую погрешность аппроксимации. При

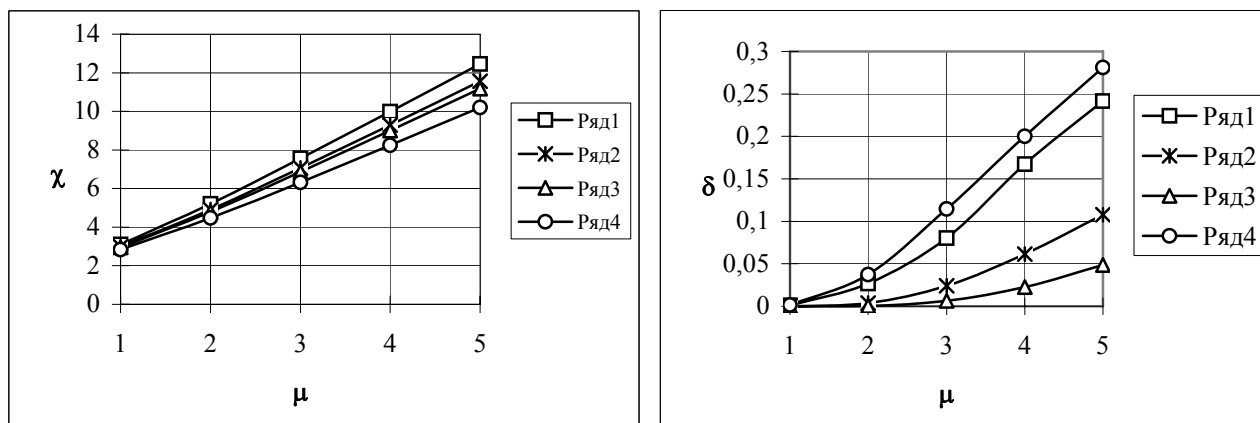
приближенном решении уравнения (3.23), например, методом Ньютона, значение α и соответствующее ему значение погрешности аппроксимации будет зависеть от начального приближения α_0 .

Таким образом, для нахождения корня уравнения, обеспечивающего минимум-минимум погрешности аппроксимации, необходимо либо правильно выбрать диапазон изменения указанного параметра, либо решать задачу методом перебора. Для решения первой задачи требуется априорная информация о свойствах процесса. Решение задачи методом перебора увеличивает время анализа. Это обстоятельство несколько сужает область применения разработанного алгоритма.

Результаты определения оптимальных значений χ и δ представлены на рис. 3.7 (ряд 1 - $m=2$, ряд 2 - $m=4$, ряд 3 - $m=6$). Для сравнения приведены значения параметра

$$\chi = \frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{\lambda}$$

для различных μ и соответствующие ему значения погрешности аппроксимации при (ряд. 4).



а) б)
Рисунок 3.7. Оптимальные значения параметров функций Лагерра и погрешности аппроксимации

Как видно из рис. 3.7, методическая погрешность аппроксимации для χ , определенного по предложенной методике меньше, чем по методике [96]. Таким образом, разработанный алгоритм позволяет найти действительно оптимальное значение параметра ортогональных функций Лагерра.

3.3. Алгоритм оценки параметра функции Лагерра, обеспечивающий минимум погрешности аппроксимации при ограничениях на модель корреляционной функции

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра является то, что её основное свойство

$$K_x(0) = D_x = \sum_{k=0}^m \beta_k, \tag{3.24}$$

как видно из выражения

$$\sum_{k=0}^m \beta_k = D_x - \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} d\omega, \tag{3.25}$$

при произвольной величине α не выполняется при конечном m (см. рис. 3.5). Условие (3.24) при произвольной величине α выполняется лишь при $m \rightarrow \infty$.

Для обеспечения условия (3.24) аналитическое выражение $K_x(\tau)$ можно искать в виде:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m c_k L_k(\tau, \alpha), \quad (3.26)$$

где
$$c_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} D_x. \quad (3.27)$$

Легко проверить, что в этом случае $K_x(0) = \sum_{k=0}^m \beta_k = D_x$. Однако, коэффициенты разложения c_k , определенные по формуле (3.27), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции b_k

$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \quad (3.28)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k = D_x. \quad (3.29)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать Δ_1 по b_k [87]:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \sum_{k=0}^m b_k = \min. \quad (3.30)$$

Найдём частные производные $\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n}$ и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial b_n} = -2 \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha) \right] L_n(\tau, \alpha) + \lambda = 0. \quad (3.31)$$

С учетом свойств ортогональных функций Лагерра, получим:

$$b_k = \beta_k + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}. \quad (3.32)$$

Перейдем к оценке погрешности аппроксимации. Для этого подставим b_k из (3.32) в выражение для оценки Δ_1 . В результате получим:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{\left(D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)^2}{\alpha(m+1)}. \quad (3.33)$$

Погрешность Δ_1 представим следующим образом:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (3.34)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2; \\ \Delta_2 = \frac{\left(D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)^2}{\alpha(m+1)}. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

В предыдущем случае было показано, что Δ является функцией параметра α . Можно показать, что и погрешность Δ_2 , которую с учетом (3.14) приведем к виду:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\alpha(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) \frac{[j\omega_1 - \alpha/2][j\omega_2 - \alpha/2]}{[j\omega_1 + \alpha/2][j\omega_2 + \alpha/2]} d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.36)$$

также является функцией параметра α .

Найдём условие определения оптимального значения параметра α , при котором $\Delta_1 = \min$.

Это условие, как следует из (3.30), найдем из уравнения:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.37)$$

Значение $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$ определяется выражением (3.20). А $\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha}$ с учётом (3.36) примет

вид:

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ 2\alpha(m+1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} d\omega \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega + \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 \right] \right\}. \quad (3.38)$$

Подставив в (3.37) выражения (3.20) и (3.38), после промежуточных преобразований получим:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left\{ \left[\alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 - \left[\alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}. \quad (3.39)$$

Представляя в выражении (3.39) разность квадратов как произведение суммы оснований на их разность, получим:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2(m+1)} \left[\alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \times$$

$$\left[\alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_{m+1}(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \quad (3.40)$$

Выражение (3.40) с учётом (3.8), (3.25) равно:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} b_m b_{m+1} \quad (3.41)$$

Так как коэффициент $b_m \neq 0$ и параметр $\alpha \neq 0$, условие минимума погрешности Δ_1 примет вид:

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (3.42)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра α добиться равенства нулю β_{m+1} коэффициента. Значения b_0, \dots, b_m в этом случае будут оптимальными.

На рис. 3.8 представлена структура коррелометра с аппроксимацией, соответствующая алгоритмам (3.32), (3.42) [87].

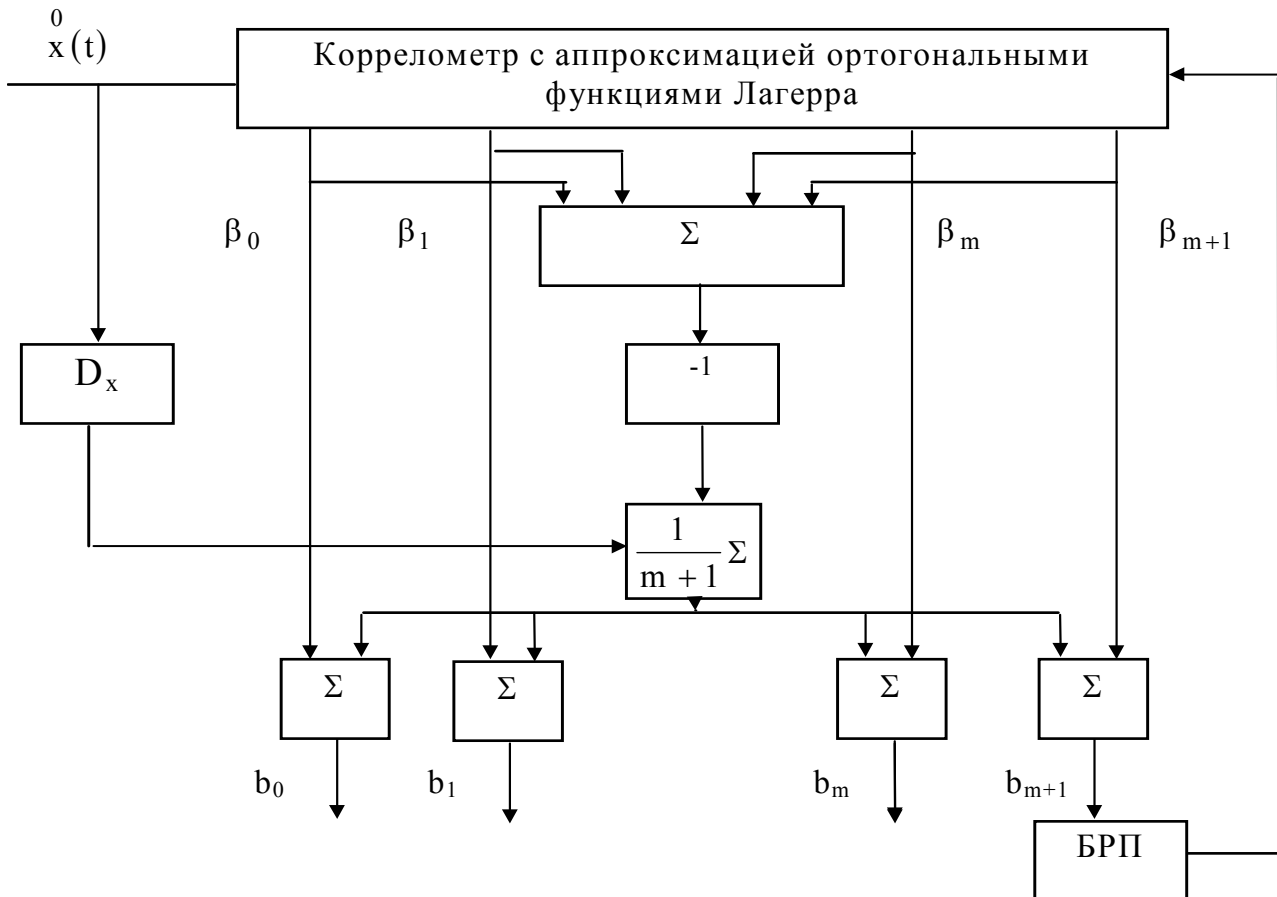


Рисунок 3.8. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

В соответствии с выражением (3.32) можно предложить ещё один алгоритм для определения b_0, \dots, b_m и решения уравнения (3.42) (см. рис. 3.9) [3].

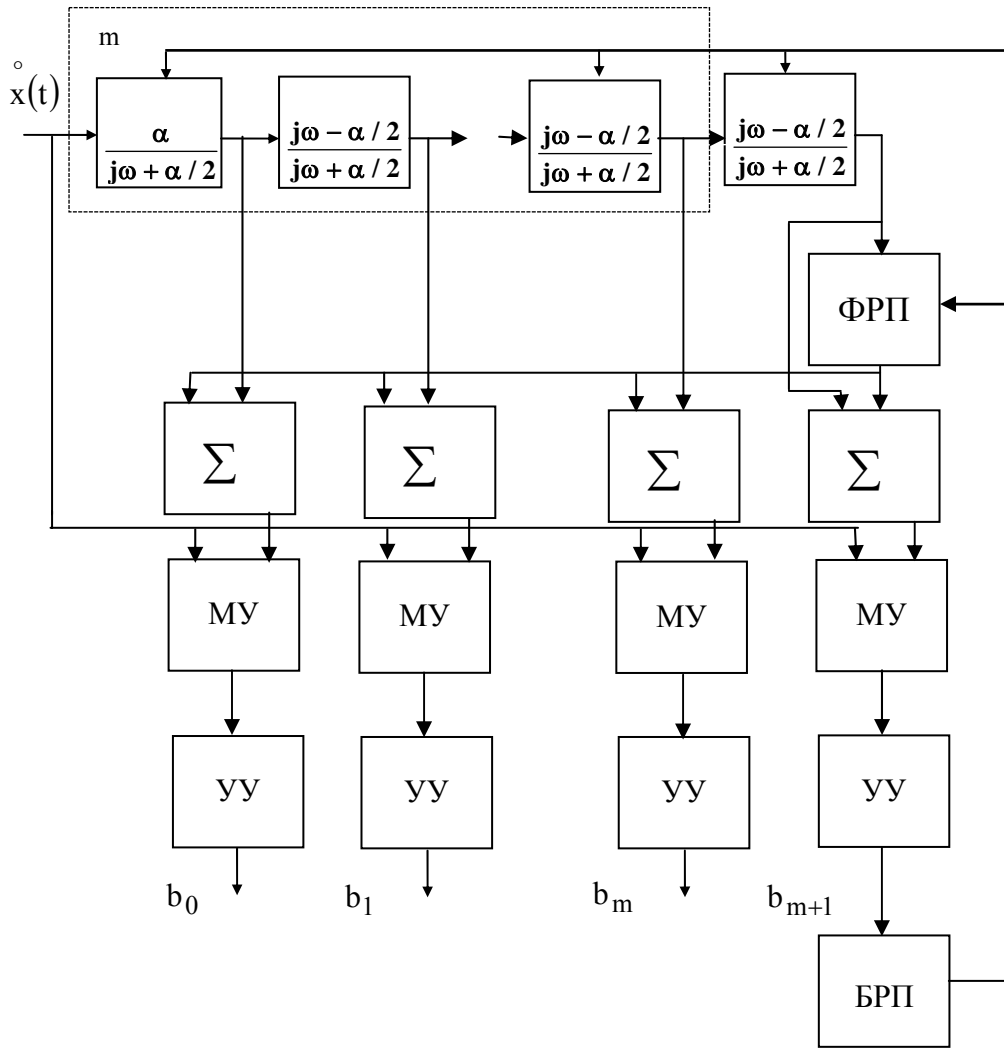


Рисунок 3.9. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с оптимальной подстройкой параметра

Для этого, подставив в (3.32) ^{фильтра} выражения (3.8) и (3.25), получим:

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \left[\frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k + \frac{1}{m+1} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} \right] d\omega. \quad (3.43)$$

Или

$$b_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) [h_k(\tau) + H(\tau)] d\tau, \quad (3.44)$$

где

$$\begin{cases} h_k(\tau) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} W_k(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \\ H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+1)} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^{m+1} e^{j\omega\tau} d\omega. \end{cases} \quad (3.45)$$

При определении коэффициентов b_k и решения уравнения (3.42) на ЭВМ его удобнее привести к виду [87]:

$$\frac{D_x}{m+1} + \sum_{s=1}^{m+1} \left[(-1)^s \frac{m!(m+2)\alpha^{s+1}}{(s-1)!(s+1)!(m-s+1)!} \int_0^\infty K_x(\tau) \tau^s e^{-\alpha\tau/2} d\tau \right] = 0. \quad (3.46)$$

Определив из уравнения (3.46) α , можно приступить к определению коэффициентов разложения b_0, \dots, b_m . Для этого, воспользовавшись рекуррентной формулой [87]

$$b_k - b_{k+1} = \sum_{s=0}^k \left[(-1)^s \frac{k! \alpha^{s+2}}{s!(s+1)!(k-s)!} \int_0^\infty K_x(\tau) \tau^{s+1} e^{-\alpha\tau/2} d\tau \right], \quad (3.47)$$

последовательно определим b_0, \dots, b_m .

Предложенные алгоритмы определения параметра α (3.42), (3.46) и коэффициентов разложения b_k (3.32), (3.47) были промоделированы на ЭВМ.

На первом этапе моделирования, как и в подразделе 3.2, определялась зависимость методической погрешности аппроксимации корреляционной функции вида

$$\rho_{x5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \rho_{x6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \rho_{x7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

от нормированного параметра весовой функции Лагерра $\chi = \frac{\alpha}{\lambda}$ (см. рис. 3.10-3.12).

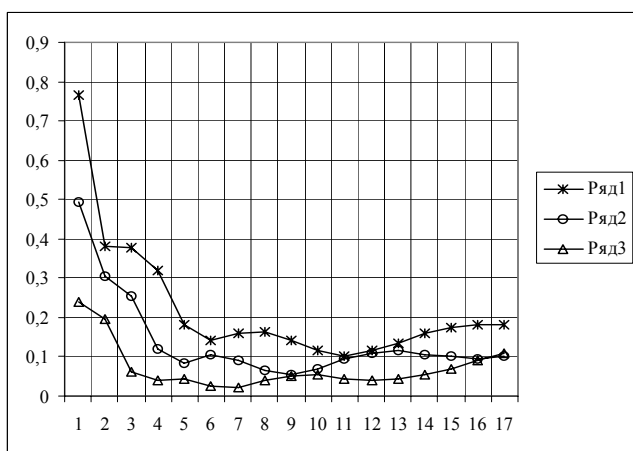


Рисунок 3.10.

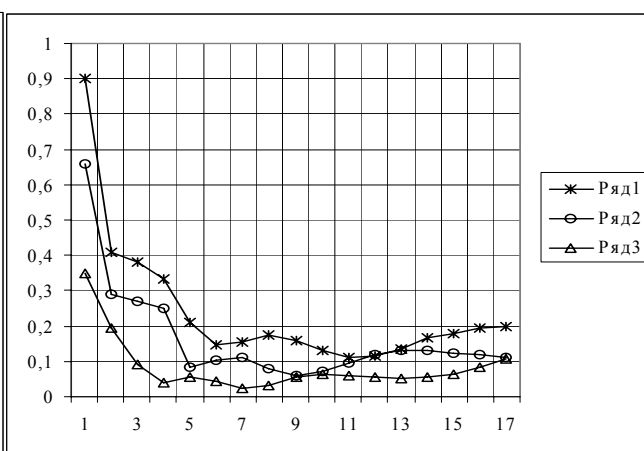


Рисунок 3.11.

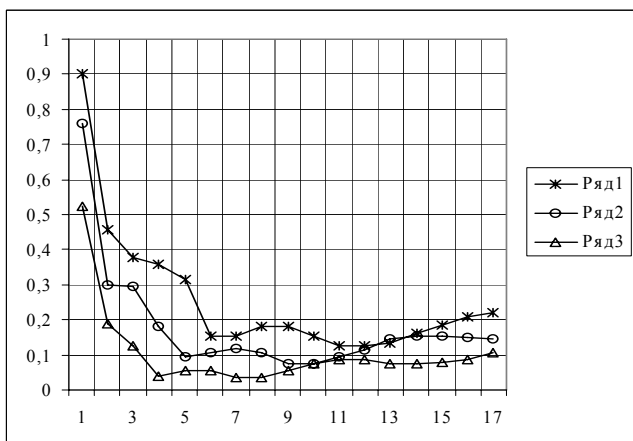


Рисунок 3.12.

На рисунке 3.10 – 3.12 ряду 1 соответствует значения погрешности при $\omega_0/\lambda = 5$, ряду 2 – 4, ряду 3 – 3.

Анализ полученных результатов показывает, что методическая погрешность аппроксимации существенно образом зависит от величины параметра χ .

Далее, для модели $\rho_{x5}(\tau)$ были определены корни уравнения (3.42) и соответствующие им методические по-

грешности аппроксимации для $m=2, 4$, $\mu=1 \div 5$ (см. приложение П.14), а также коэффициенты разложения b_0, \dots, b_m , соответствующие минимуму-миниморуму погрешности (3.33).

Результаты расчета представлены на рис. 3.13, где ряд 1 соответствует значениям при $m=2$, ряд 2 - $m=4$.

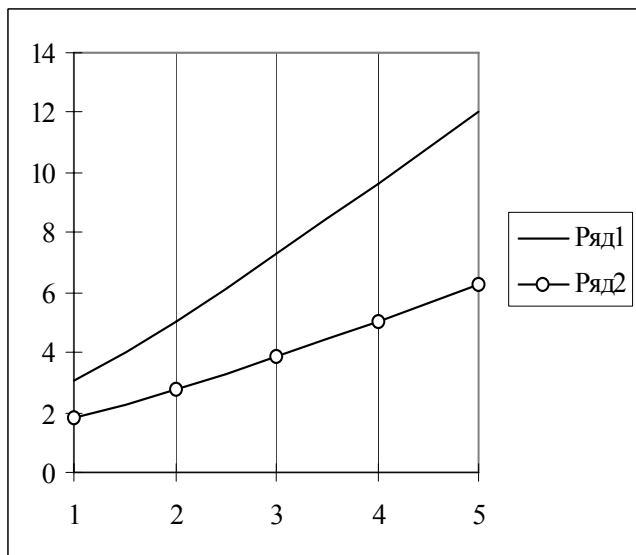


Рисунок 3.13. Оптимальные значения параметров

сущи те же недостатки, что и алгоритму, рассмотренному в подразделе 3.2. Однако, при правильно выбранном диапазоне изменения α , алгоритм (3.42) обеспечивает погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-миниморуму, и, кроме того, основное свойство корреляционной функции.

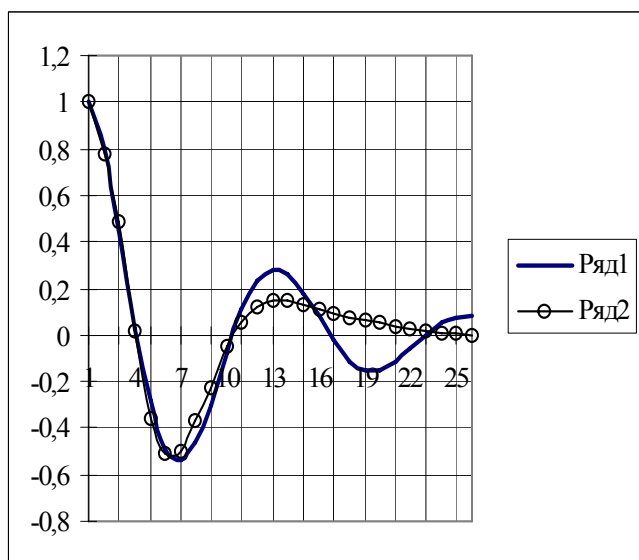


Рисунок 3.14. Результаты аппроксимации

Изменении числа членов разложения ряда (3.6), необходимо пересчитать в соответствии с (3.32) все параметры b_k .

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

число корней уравнения (3.42) в общем случае равно $(m+1)$;

величина минимума погрешности Δ_1 зависит от начального приближения α ;

3. для обеспечения минимума-миниморума погрешности необходимо правильно выбирать диапазон изменения α , т.е. необходима априорная информация о свойствах процесса.

Т.е., несмотря на то, что предложенный алгоритм обеспечивает выполнение основного свойства корреляцион-

ной функции $K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k$, ему при-

На рис. 3.14. приведены результаты аппроксимации корреляционной функции с показателем колебательности $\mu=5$ $\rho_x(\tau) = e^{-\tau} \cos 5\tau$ рассматриваемой моделью при $m=4$, параметр которой $\alpha=11,39$ определялся в результате решения уравнения (3.42), а коэффициенты b_0, \dots, b_m - в соответствии с выражением (3.32). Из анализа рисунка видно, что модель даже при небольшом числе членов разложения ряда с достаточной для практики точностью аппроксимирует корреляционную функцию исследуемого процесса, особенно на начальном участке.

Следует отметить, что, при изме-

3.4. Упрощенный алгоритм оценки параметра функции Лагерра

Рассмотренные в подразделах 3.2 и 3.3 алгоритмы легко реализуются в аппаратуре, на ЭВМ, однако, как указывалось, не лишены существенного недостатка - в результате решения уравнений (3.23) или (3.42) в общем случае возможно определение $(m+1)$ корней, обеспечивающих локальные минимумы погрешностей Δ и Δ_1 .

Это обстоятельство накладывает определенные неудобства при выборе диапазона изменения параметра функции Лагерра.

Для однозначного решения задачи, т.е. определения единственного корня, обеспечивающего погрешность аппроксимации, близкую к минимуму-миниморуму, необходимо анализировать сигнал, пропорциональный β_0 [75].

Рассмотрим уравнение

$$\alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_0(\tau, \alpha) d\tau - k \sigma_x^2 = 0, \quad (3.48)$$

где $L_0(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau/2}$ - функция Лагерра нулевого порядка;

k - постоянная величина, которая, как видно из уравнения, меньше 2.

Для $K_{x5}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau/2} \cos \omega_0 \tau$ это уравнение приведем к виду:

$$\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau/2} e^{-\lambda\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau - k = 0. \quad (3.49)$$

Разрешив уравнение относительно α , получим:

$$\alpha = 2 \frac{-\lambda(1-k) + \sqrt{\lambda^2(1-k)^2 + k(2-k)(\lambda^2 + \omega_0^2)}}{2-k}. \quad (3.50)$$

При $k=1$ выражение примет самый простой вид, а именно:

$$\alpha = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (3.51)$$

Решив уравнение (3.49) для корреляционных функций

$$K_{x,6,7}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) \text{ при } k=1, \text{ получим:}$$

$$\alpha = 2 \left(\sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (3.52)$$

Заметим, что зависимость параметра α от параметров корреляционной функции в выражении (3.51) совпадает с выражением, полученным в [96] для условия минимума погрешности в равномерном смысле. Однако, в [96] приведен лишь результат, а не алгоритм поиска параметра α в результате решения уравнения (3.49) (см. рис. 3.15).

Отметим важное преимущество предлагаемого алгоритма: при увеличении m параметр функции Лагерра $\alpha = \text{const}$, в отличие от значения α , определенного по алгоритмам (3.23) и (3.42). При определении α в результате уравнения (3.49), величина этого параметра будет близка к оптимальной величине α_{opt} (см. рис. 3.16, где ряд 1 соответствует $K_{x7}(\tau)$, ряд 2 - $K_{x5}(\tau)$, ряд 3 - $K_{x6}(\tau)$), а коэффициенты ряда (3.6) β_0, \dots, β_m обеспечат погрешность, близкую к минимуму-миниморуму. Для иллюстрации этого факта в таблице 3.2 приведены результаты расчета на ЭВМ значений нор-

мированного параметра χ , вычисленного в соответствии с выражением (3.49) при $k=1$, и соответствующих ему значений относительной погрешности аппроксимации. Для сравнения в ней приведены значения $\chi_{opt} = \alpha_0 / \lambda$ и δ_{min} , соответствующие минимуму-минимуму погрешности аппроксимации.

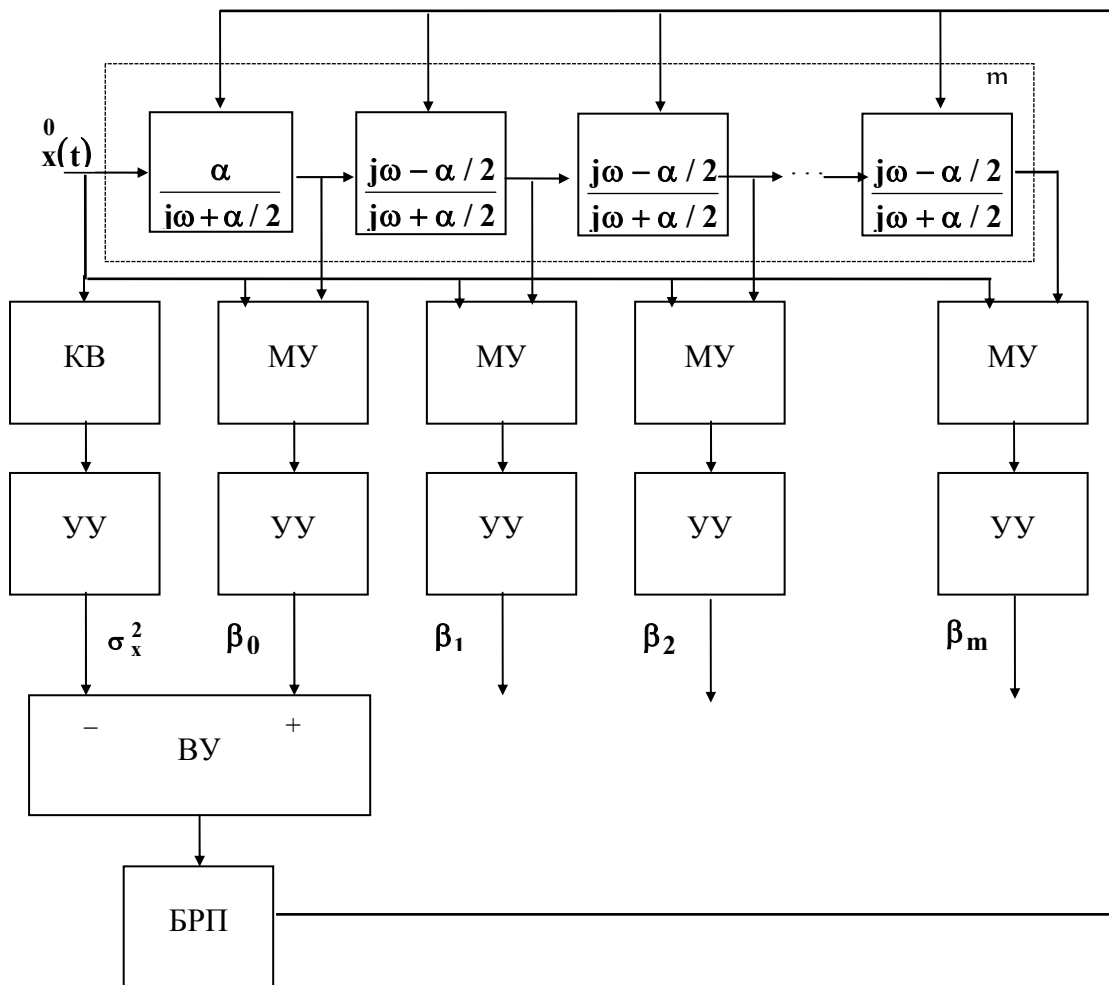


Рисунок 3.15. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с подстройкой параметра

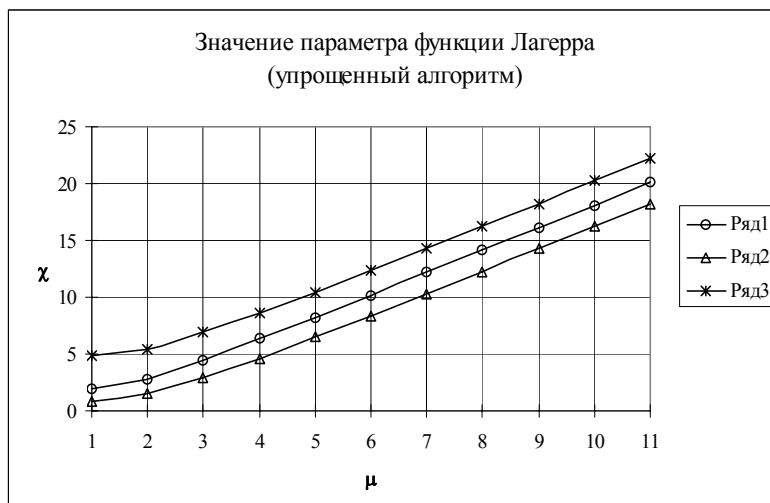


Рисунок 3.16. Параметр функций Лагерра

Параметры ортогональных функций Лагерра и погрешности аппроксимации

Таблица 3.2

$\rho_x(\tau)$	m	μ	χ	δ	χ_{opt}	δ_{min}
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	2	2	4,45	0,04	5,25	0,025
		3	6,35	0,115	7,70	0,08
		4	8,30	0,20	10,00	0,17
		5	10,20	0,38	12,45	0,24
	4	3	6,35	0,0275	7,00	0,025
		4	8,20	0,075	9,30	0,06
		5	10,20	0,1275	13,50	0,11
	6	3	6,35	0,01	7,00	0,005
		4	8,30	0,03	9,00	0,02
		5	10,20	0,0575	11,20	0,045
$e^{-\lambda \tau } (\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	4	2	3,9	0,005	5,00	0,001
		3	4,65	0,04	6,70	0,02
		4	6,45	0,10	8,80	0,055
		5	8,40	0,15	11,00	0,10
		6	10,35	0,205	13,00	0,15
		7	12,30	0,26	16,00	0,20
		8	14,25	0,30	18,00	0,24
$e^{-\lambda \tau } (\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau)$	4	2	6,85	0,02	5,50	0,01
		3	8,65	0,045	7,30	0,03
		4	10,45	0,08	9,70	0,06
		5	12,4	0,12	12,00	0,12

Как показали исследования, значения параметра α находятся в области глобального минимума квадратической погрешности аппроксимации для широкого класса корреляционных функций исследуемых процессов. В связи с этим, для поиска оптимального значения α возможно последовательное решение двух уравнений:

$$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0; \\ \beta_{m+1} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Результат решения первого уравнения (единственный корень) используется в качестве начального приближения при решении второго уравнения.

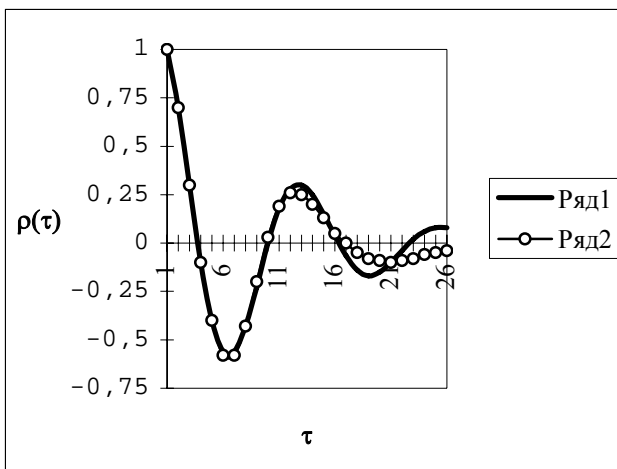
Полученные результаты можно обобщить и на случай определения параметра α при аппроксимации корреляционной функции моделью (3.28).

Как и в случае (3.6), для повышения точности аппроксимации корреляционных функций моделью вида (3.28), возможно последовательное определение α в результате решения двух уравнений:

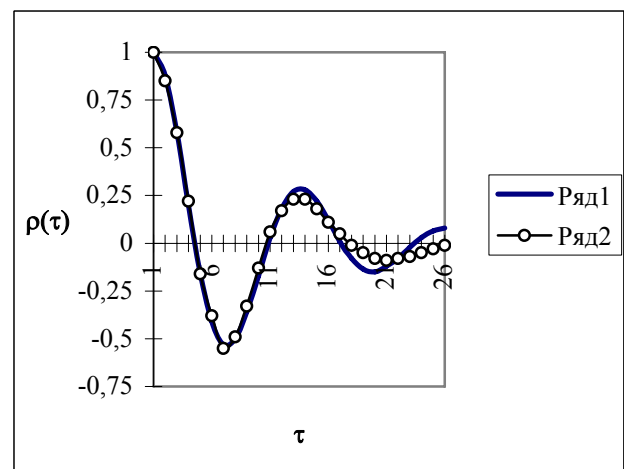
$$\begin{cases} \beta_0 - \sigma_x^2 = 0; \\ b_{m+1} = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Причем, результат решения первого уравнения является начальным приближением для второго. Значения параметра α и коэффициентов разложения b_0, \dots, b_m в этом случае будут удовлетворять минимуму-минимуму погрешности аппроксимации при дополнительном условии $K_x(0) = \sum_{k=0}^m b_k$. Пример аппроксимации корреляционных функций колебательных моделей ($\lambda = 1$) моделью $\rho_a(\tau) = \sum_{k=0}^7 b_k L_k(\tau, \alpha)$

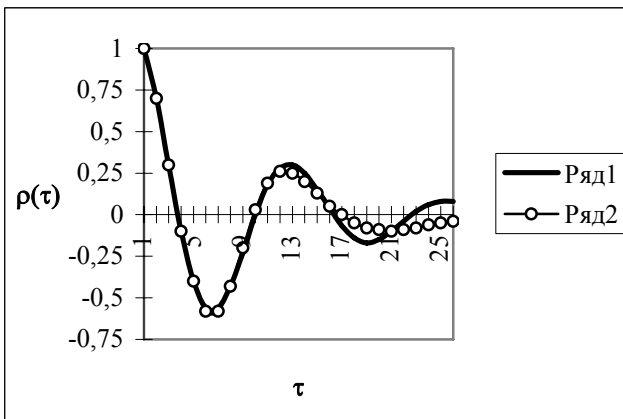
приведен на рис. 3.17.



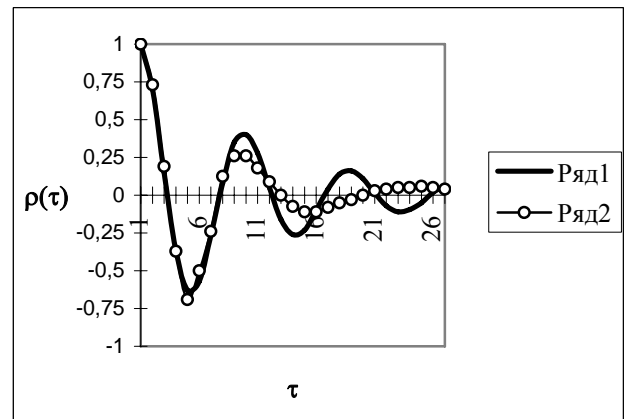
а) $\rho_{x5}(\tau)$, $\mu = 5, \alpha = 10,198$



б) $\rho_{x6}(\tau)$, $\mu = 5, \alpha = 8,40$



а) $\rho_{x7}(\tau)$, $\mu = 5, \alpha = 12,40$



б) $\rho_{x5}(\tau)$, $\mu = 7, \alpha = 10,198$

Рисунок 3.17. Результаты аппроксимации

3.5. Применение экспоненциальной аппроксимации корреляционной функции для определения параметра ортогональных функций Лагерра

При аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра параметр α связан с интервалом корреляции исследуемого процесса. Так, например, для $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda\tau/2} \cos \omega_0 \tau$

$$\alpha = \frac{2}{\tau_k^{(2)} \sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (3.55)$$

Учитывая, что, при аппроксимации корреляционной функции экспоненциальной функцией $e^{-\beta\tau}$, её параметр характеризует затухание корреляционной функции, т.е. величину, связанную с интервалом корреляции [96], и, кроме того, зависимость параметра β от параметров корреляционной функции однозначна [87], представляет интерес рассмотреть алгоритм подбора параметра α , основанный на аппроксимации корреляционной функции экспоненциальной функцией.

Уравнение для определения параметра β имеет вид:

$$4\beta^2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \tau e^{-\beta\tau} d\tau - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.56)$$

Оно может быть решено как аналитически, так и аппаратно. Причём, при аппаратном решении этой задачи необходим фильтр с регулируемыми параметрами с импульсной характеристикой $h(\tau, \alpha) = 4\beta^2 \tau e^{-\beta\tau}$. Частотная характеристика такого фильтра имеет вид [50]:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau, \beta) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{4}{(1 + j\omega T)^2}, \quad (3.57)$$

где $T=1/\beta$.

Введя обозначение $T=2/\alpha$, частотную характеристику приведем к виду:

$$W(j\omega) = 1 - W_0(j\omega) + W_1(j\omega), \quad (3.58)$$

где $W_0(j\omega)$ и $W_1(j\omega)$ - частотные характеристики фильтров Лагерра нулевого и первого порядков соответственно.

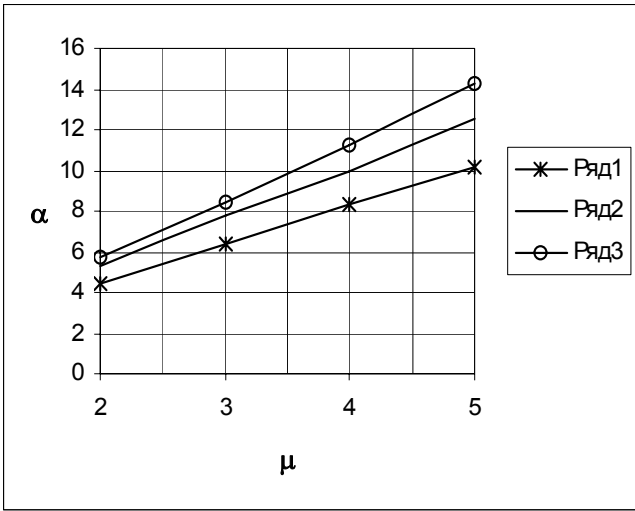
Уравнение (3.56), в соответствии с (3.58), приведём к виду:

$$\beta_0 - \beta_1 - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.59)$$

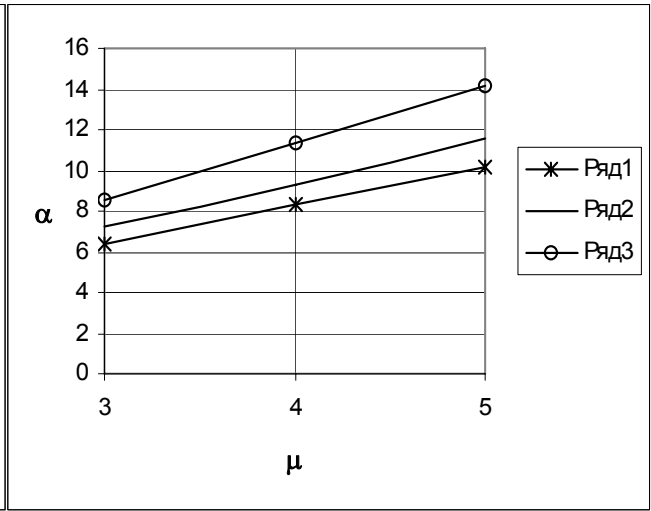
Это уравнение дает возможность получить ещё один алгоритм поиска параметра функций Лагерра. Анализ результатов моделирования предложенного алгоритма на ЭВМ для колебательных моделей корреляционных функций показывает, что величина параметра α (см. рис. 3.18.) также находится в области глобального минимума квадратической погрешности (см. рис. 3.19), а величина $\chi=\alpha/\lambda$ (ряд 2), соответствующая минимуму-миниморуму, находится между $\chi_1=\varphi_1(\beta_0)$ и $\chi_2=\varphi_2(\beta_0, \beta_1)$.

Следует отметить, что алгоритмы, рассмотренные в подразделах 3.4. и 3.5 являются частными случаями алгоритма [54]

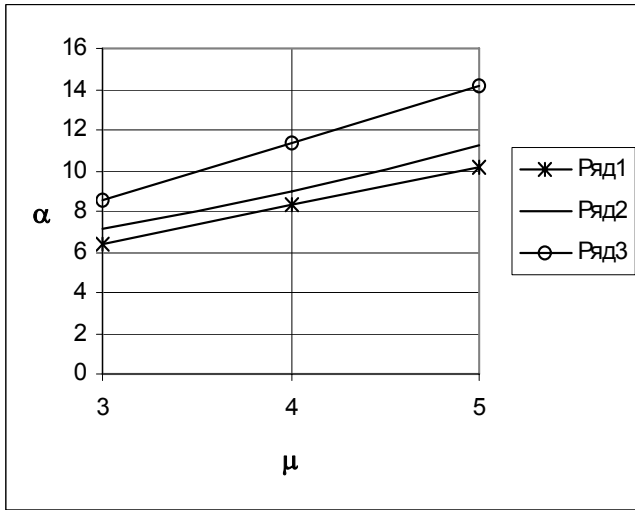
$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.60)$$



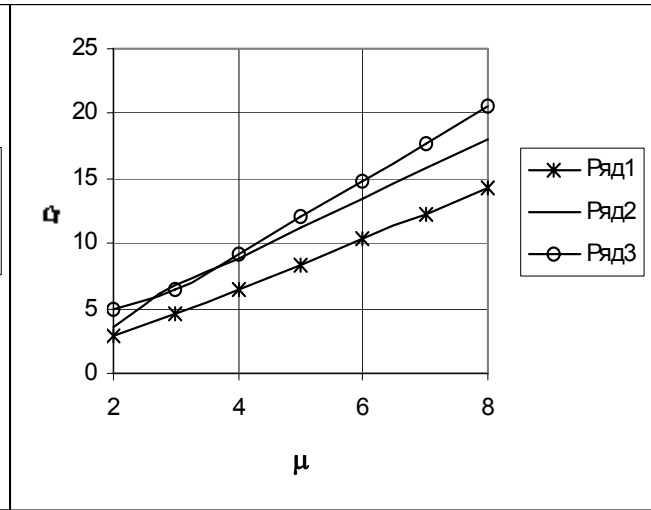
а) $\rho_{x5}(\tau), m=2$



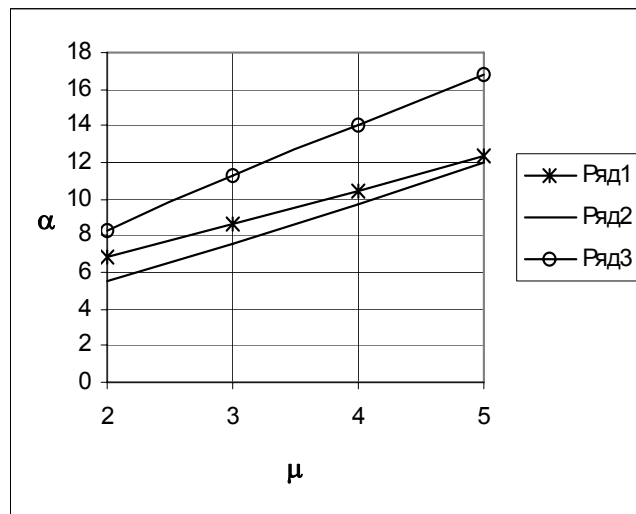
б) $\rho_{x5}(\tau), m=4$



в) $\rho_{x5}(\tau), m=6$

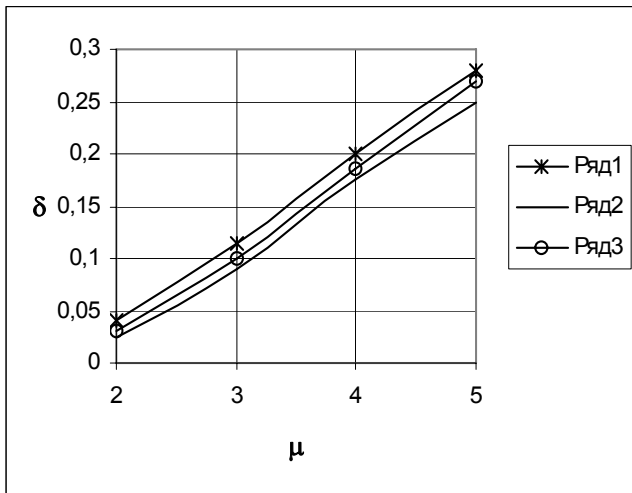


г) $\rho_{x6}(\tau), m=4$

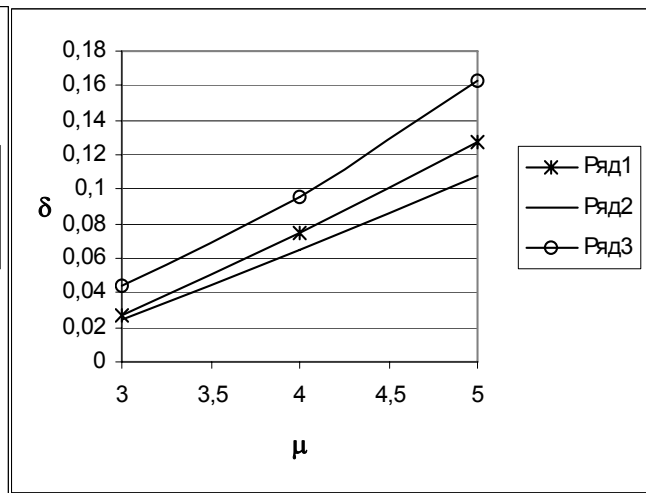


д) $\rho_{x7}(\tau), m=4$

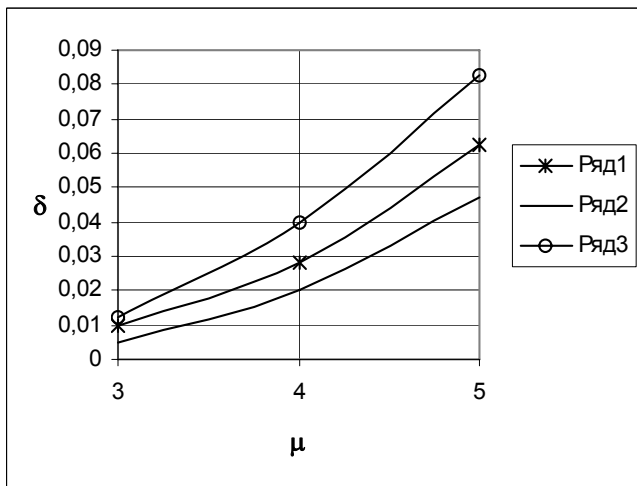
Рисунок 3.18. Значения параметров функций Лагерра



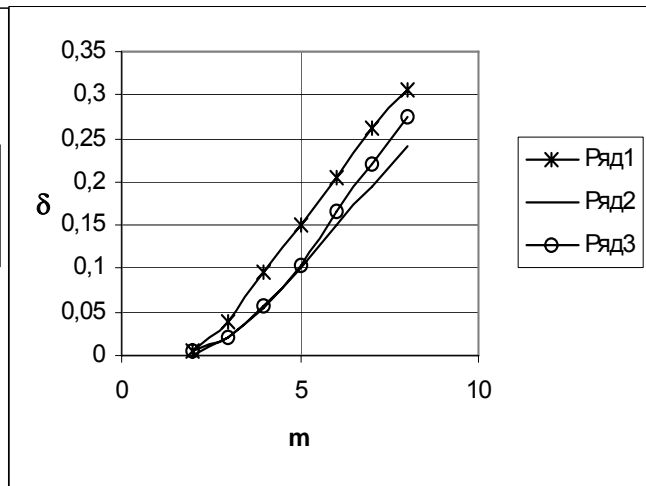
а) $\rho_{x5}(\tau), m=2$



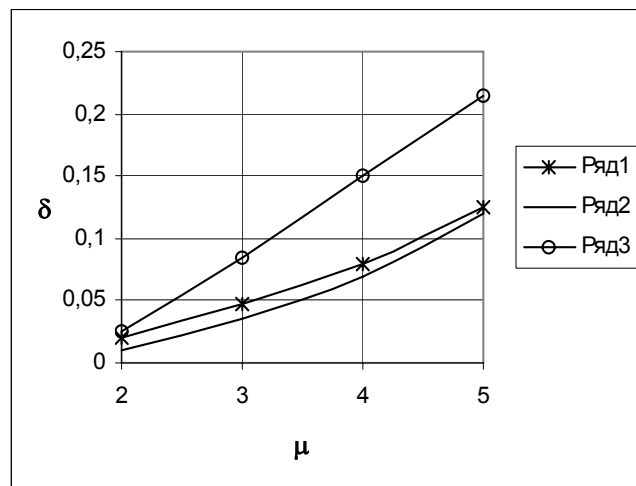
б) $\rho_{x5}(\tau), m=4$



в) $\rho_{x5}(\tau), m=6$



г) $\rho_{x6}(\tau), m=4$



д) $\rho_{x7}(\tau), m=4$

Рисунок 3.19. Погрешности аппроксимации

Структурная схема коррелометра, параметр функций Лагерра которого определяется в результате решения уравнения (3.56), представлена на рис. 3.20 [54].

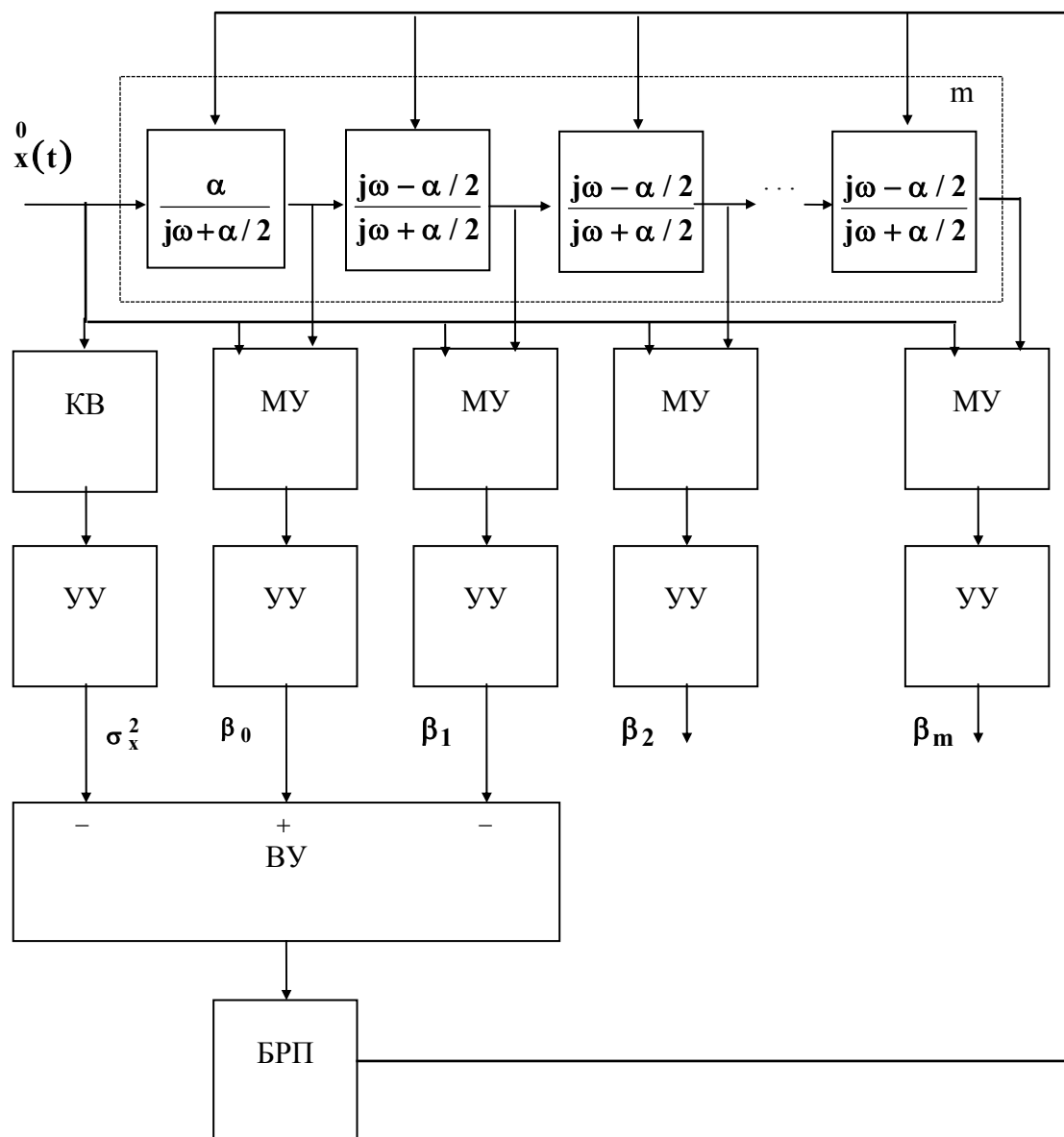


Рисунок 3.20. Коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра с подстройкой параметра α

На рис. 3.21 представлена схема коррелометра, в котором параметры разложения определяются в соответствии с выражением (3.42), а подстройка параметра – в соответствии с выражением (3.59) [6].

Коррелометр содержит фильтр Лагерра m -го порядка 1, включающий в себя фильтр нулевого порядка 2_0 и ячейки «бесконечной» полосы $2_1, \dots, 2_m$, блоки умножения 3, блоки усреднения 4, сумматоры 5, 7 (коэффициент передачи – $1/(m+1)$), 9, инвертор 6, дисперсиометр 8, блок регулировки параметра 10.

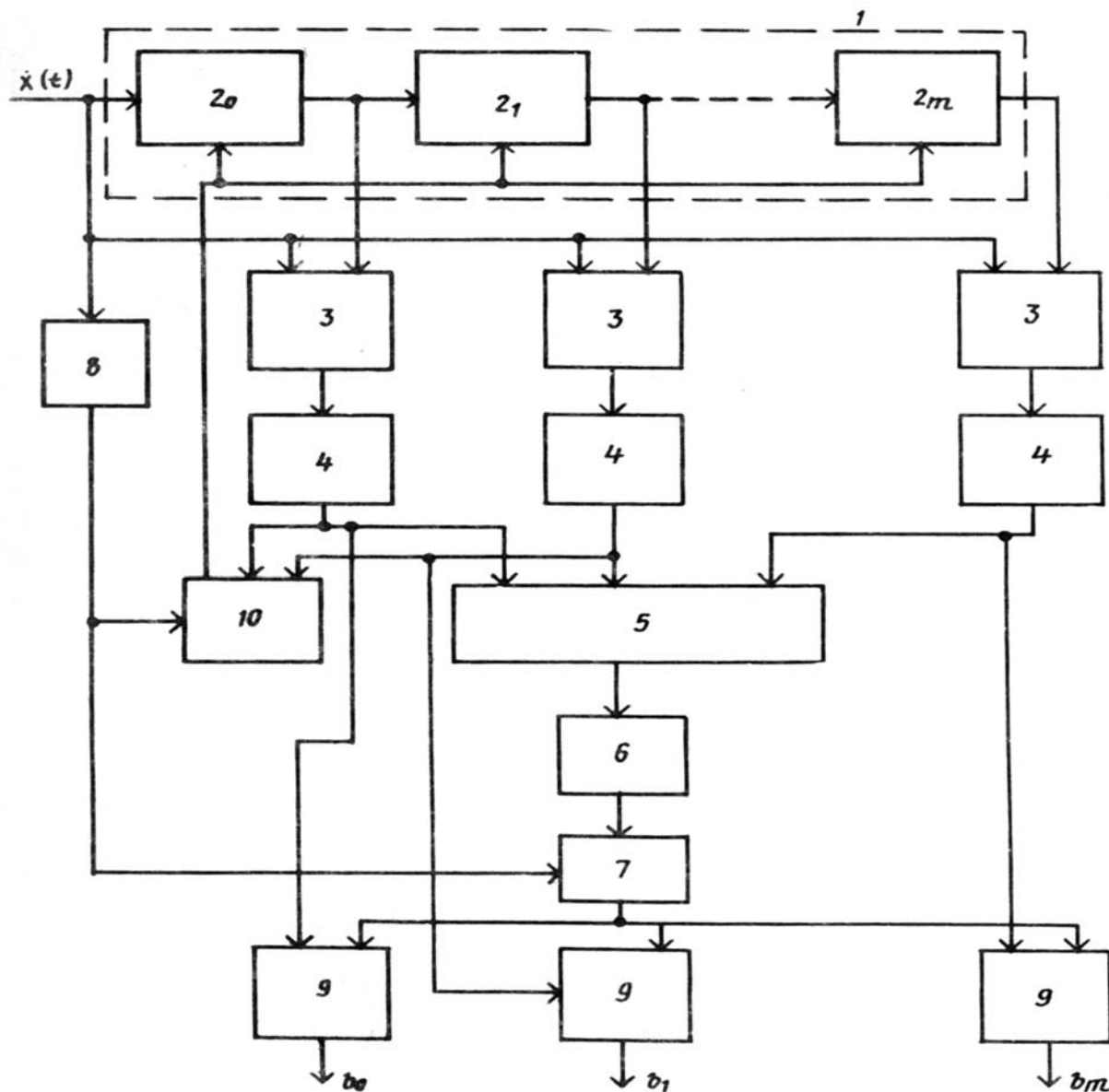


Рисунок 3.21. Коррелометр с аппроксимацией с подстройкой параметра и соблюдением основного свойства корреляционной функции

С помощью коррелометра возможна оценка как коэффициентов β_k , так и b_k . Выходные сигнал k -го блока усреднения 4, равные β_k , поступают на сумматор 5 и блок регулировки параметра α 10.

Выходной сигнал k -го сумматора 9 принимается в качестве оценки коэффициента разложения корреляционной функции в ряд (3.28) b_k , а значение параметра α определяется блоком подстройки параметра 10, который работает в соответствии с алгоритмом (3.59).

3.6. Минимизация статистической погрешности в коррелометрах с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Предложенные алгоритмы точности аппроксимации корреляционных функций путем подбора величины параметра уменьшают лишь методическую погрешность аппроксимации, оставляя без изменения статистическую погрешность, вызванную конечным временем анализа, которая при заданном времени усреднения также является функцией параметра фильтра Лагерра.

Определим основные соотношения для погрешности аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра с учетом параметров усредняющего устройства [54].

Оценка квадратической погрешности аппроксимации имеет вид:

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau, \quad (3.61)$$

где $\beta_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) h_k(\tau_1, \alpha) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$ - оценка k-го коэффициента разложения;

$h_k(\tau, \alpha) = \alpha L_k(\tau, \alpha)$ - импульсная характеристика фильтра Лагерра k-го порядка;

$H(\tau)$ - импульсная характеристика усредняющего устройства.

Математическое ожидание коэффициента β_k , как следует из (3.8), равно:

$$M[\beta_k] = \alpha \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau = \beta_k. \quad (3.62)$$

С учётом полученного выражения формула (3.61) может быть представлена в виде:

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \beta_k + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (3.63)$$

Обозначив через $\overset{\circ}{\beta}_k = \beta_k - \beta_k$ центрированную оценку коэффициента, получим:

$$\bar{\Delta} = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \overset{\circ}{\beta}_k^2. \quad (3.64)$$

Из выражения (3.64) видно, что погрешность аппроксимации представляет сумму двух слагаемых

$$\bar{\Delta} = \Delta_M + \Delta_C.$$

Первое слагаемое

$$\Delta_M = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$$

представляет собой методическую квадратическую погрешность аппроксимации корреляционной функции ортогональным рядом

$$\sum_{k=0}^m \beta_k L_k(\tau, \alpha).$$

Второе -

$$\overset{\circ}{\epsilon}_C = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \overset{\circ}{\beta}_k^2 \quad (3.65)$$

носит случайный характер и целиком зависит от свойств оценок коэффициентов $\overset{\circ}{\beta}_k$.

Математическое ожидание погрешности будет равно

$$\Delta = M[\overset{\circ}{\Delta}] = \Delta_M + \overset{\circ}{\Delta}, \quad (3.66)$$

где $\Delta_C = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m D_k$ - статистическая составляющая погрешности аппроксимации, D_k -

дисперсия оценки коэффициента $\overset{\circ}{\beta}_k$.

Условие экстремума квадратической погрешности аппроксимации Δ в области изменения параметра α примет вид:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta_M}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.67)$$

С учётом выражения (3.22)

$$\frac{\partial \Delta_M}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} \beta_m \beta_{m+1}. \quad (3.68)$$

Рассмотрим статистическую составляющую погрешности аппроксимации. Для её определения необходимо найти выражение для $\overset{\circ}{\beta}_k$:

$$\overset{\circ}{\beta}_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) h_k(\tau_1, \alpha) [\overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_1 - \tau_2) - K_x(\tau_1)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.69)$$

Считая закон распределения входного сигнала нормальным, получим:

$$D_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) H(\tau_4) h_k(\tau_3, \alpha) h_k(\tau_1, \alpha) K_x(\tau_4 - \tau_2) K_x(\tau_4 + \tau_3 - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau_2) H(\tau_4) h_k(\tau_3, \alpha) h_k(\tau_1, \alpha) K_x(\tau_2 - \tau_3 - \tau_4) K_x(\tau_4 - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \quad (3.70)$$

Выразив в формуле (3.70) $K_x(\tau)$ через спектральную плотность исследуемого процесса, получим:

$$D_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 |W_k(j\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 |W_k(j\omega_1) W_k(-j\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.71)$$

где $W_k(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$ - частотная характеристика фильтра Лагерра k -го порядка;

$W(j\omega)$ - частотная характеристика усредняющего фильтра.

Подставляя выражение для D_k из (3.70) в формулу (3.64) и учитывая, что $|W_k(j\omega)|^2 = |W_0(j\omega)|^2$, получим:

$$\Delta_C = \frac{m+1}{\alpha} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(\omega_1) \mathcal{S}_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 |W_0(j\omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(\omega_1) \mathcal{S}_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 W_k(j\omega_1) W_k(-j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.72)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = (m+1) \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(\omega_1) \mathcal{S}_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 J_{1\alpha}(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(\omega_1) \mathcal{S}_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 J_{2\alpha}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.73)$$

где

$$J_{1\alpha}(\omega_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\alpha} |W_0(j\omega_2)|^2 \right]; \quad (3.74)$$

$$J_{2\alpha}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m W_k(j\omega_1) W_k(j\omega_2) \right]. \quad (3.75)$$

Из выражения (3.15) находим, что $|W_0(j\omega_2)|^2 = \frac{\alpha^2}{\omega_2^2 + \alpha^2/4}$.

С учётом этого формула (3.74) примет вид:

$$J_{1\alpha} = \frac{\omega_2^2 - \alpha^2/4}{(\omega_2^2 + \alpha^2/4)^2} = \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{Re}[W_k(j\omega_2) W_{k+1}(-j\omega_2)]. \quad (3.76)$$

Так как в соответствии с (3.15)

$$\sum_{k=0}^m W_k(j\omega_1) W_k(-j\omega_2) = \frac{\alpha}{j\omega_1 + j\omega_2} \left\{ 1 - \left[\frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^{m+1} \right\}, \quad (3.77)$$

то из выражения (3.75) получим:

$$J_{2\alpha} = (m+1) \frac{j\omega_1 j\omega_2 - \alpha^2/4}{(j\omega_1 + \alpha/2)^2 (j\omega_2 + \alpha/2)^2} \left[\frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^m =$$

$$= \frac{m+1}{2\alpha^2} [W_m(j\omega_1) W_{m+1}(j\omega_2) + W_{m+1}(j\omega_1) W_m(j\omega_2)] \quad (3.78)$$

Учитывая, что равенство (3.76) справедливо при любом k , подставив (3.76), (3.78) в выражение (3.73) и принимая во внимание свойства интегралов, будем иметь:

$$\frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = \frac{m+1}{\alpha^2} \left\{ \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(\omega_1) \mathcal{S}_x(\omega_2) |W(j\omega_1 + j\omega_2)|^2 W_m(j\omega_2) W_{m+1}(-j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_x(\omega_1) \mathcal{S}_x(\omega_2) |W(j\omega_2 - j\omega_1)|^2 W_m(j\omega_1) W_{m+1}(j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right\} \quad (3.79)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Delta_C}{\partial \alpha} = \frac{m+1}{\alpha^2} M \left[\overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right]. \quad (3.80)$$

Таким образом, подставляя выражение для производных составляющих погрешности аппроксимации из (3.68), (3.80) в (3.67), получим выражение.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \frac{m+1}{\alpha^2} \left\{ M \left[\overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right] - \beta_m \beta_{m+1} \right\} = 0. \quad (3.81)$$

Так как выражение $(m+1)/\alpha^2 \neq 0$, то выполнение условия (3.81) возможно лишь при выполнении условия

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} \right] - \beta_m \beta_{m+1} = 0. \quad (3.82)$$

Произведя в (3.82) замену: $\beta_m = \overset{\circ}{\beta}_m - \overset{\circ}{\epsilon}_m$ и $\beta_{m+1} = \overset{\circ}{\beta}_{m+1} - \overset{\circ}{\epsilon}_{m+1}$, получим условие минимума погрешности Δ :

$$M \left[\overset{\circ}{\epsilon}_m \overset{\circ}{\beta}_{m+1} + \overset{\circ}{\beta}_m \overset{\circ}{\epsilon}_{m+1} - \overset{\circ}{\epsilon}_m \overset{\circ}{\epsilon}_{m+1} \right] = 0. \quad (3.83)$$

Структурная схема коррелометра с подстройкой параметра α в соответствии с алгоритмом (3.83) представлена на рис. 3.22 [8].

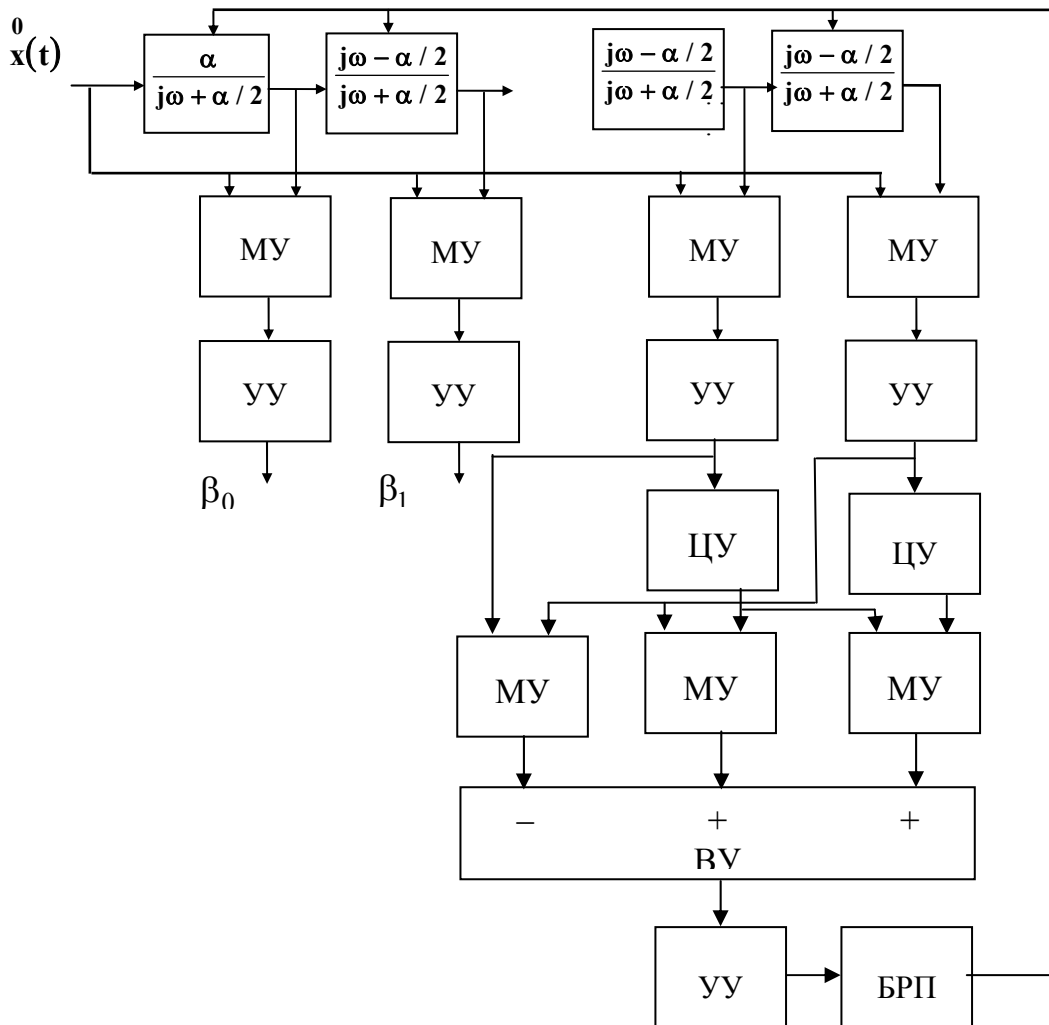


Рисунок 3.22. Коррелометр с аппроксимацией

3.7. Анализ погрешности коррелометра с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Одной из важных задач прикладного анализа случайных процессов является определение составляющих полной погрешности средств статистических измерений, к которым относится и коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра, содержащий фильтр Лагерра k -го порядка с частотной характеристикой

$$W_k(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left(\frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k, \quad k=0, 1, 2, \dots, m, \quad (3.84)$$

включающий в себя фильтр нулевого и последующих порядков, множительные и усредняющие устройства, блок регулировки параметра фильтра Лагерра [54].

Вследствие разброса параметров реального коррелометра, частотная характеристика фильтра Лагерра будет отличаться от идеальной и примет вид:

$$W_k^*(j\omega) = c_k \frac{\alpha_0}{j\omega + \alpha_0/2} \prod_{s=1}^k \frac{j\omega - \lambda_s \alpha_s / 2}{j\omega + \alpha_s / 2}, \quad (3.85)$$

где c_k - коэффициент преобразования фильтра Лагерра k -го порядка;

α_s - параметр s -й ячейки фильтра Лагерра;

λ_s - коэффициент преобразования вычитающего устройства s -й ячейки фильтра Лагерра.

В этом случае квадратическая погрешность аппроксимации будет равна:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k^* L_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \beta_k^* + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^{*2}, \quad (3.86)$$

где $\beta_k = \int_0^{\infty} K_x(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau$ - «идеальный» k -й коэффициент разложения;

$\beta_k^* = \alpha \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x(t-\tau) x(t-\tau-\tau_1) h(\tau) L^*(\tau, \alpha_0, \dots, \alpha_k) d\tau d\tau_1$ - оценка k -го коэффициента

разложения;

$h(\tau)$ - импульсная характеристика сглаживающего устройства;

$L^*(\tau, \alpha_0, \dots, \alpha_k)$ - импульсная характеристика реального фильтра Лагерра.

Выражение (3.86) является функцией случайных параметров c_k , α_s , λ_s . Считая отклонения реальных параметров от идеальных малыми, разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора в окрестности математических ожиданий этих параметров, ограничившись квадратичными членами. Тогда математическое ожидание Δ при условии некоррелированности параметров c_k , α_s , λ_s будет равно:

$$M[\Delta] = M[\Delta_{и}^*] + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right] \sigma_{c_j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_j^2} \right] \sigma_{\alpha_j}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda_j^2} \right] \sigma_{\lambda_j}^2, \quad (3.87)$$

где $\Delta_{и}^* = \int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau - \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \beta_{ки}^* + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_{ки}^{*2}$;

$\beta_{ки}^* = \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \overset{\circ}{x}(t - \tau) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) h(\tau) L_k(\tau_1, \alpha) d\tau d\tau_1$ - оценка k -го коэффициента раз-

ложения при условии идеальности фильтра Лагерра;

$\sigma_{c_j}^2, \sigma_{\alpha_j}^2, \sigma_{\lambda_j}^2$ - среднеквадратические относительные погрешности параметров;

Определим коэффициенты ряда (3.87):

$$M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right] = \frac{2}{\alpha} \beta_j^2 + \frac{2}{\alpha} \sigma_{\beta_j}^2, \text{ где } \sigma_{\beta_j}^2 = M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ji}^{*2} \right], \text{ а } \frac{\partial \beta_k^*}{\partial c_j} = \frac{\beta_k^*}{c_j}.$$

$$M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_0^2} \right] = \frac{1}{2\alpha^3} \left\{ \sum_{k=0}^m \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + 2\overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] + \sum_{k=0}^m \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 + \sum_{k=0}^m (\beta_k + \beta_{k+1})^2 \right\}.$$

При определении коэффициентов учитывалось, что $\frac{\partial \beta_k^*}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2\alpha} (\beta_k^* + \beta_{k+1}^*)$.

$$M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_j^2} \right] = \frac{1}{2\alpha^3} \left\{ \sum_{k=j}^m \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] + \sum_{k=j}^m \left(\overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 + \sum_{k=j}^m (\beta_{k-1} + \beta_{k+1})^2 \right\}.$$

Отметим, что $\frac{\partial \beta_k^*}{\partial \alpha_j} = -\frac{1}{2\alpha} (\beta_{k-1}^* - \beta_{k+1}^*)$.

$$M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda_j^2} \right] = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \sum_{k=j}^m \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* \right) \right] + \sum_{k=j}^m \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* \right)^2 + \sum_{k=j}^m (\beta_k - \beta_{k+1})^2 \right\},$$

$$\text{а } \frac{\partial \beta_k^*}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{2} (\beta_k^* - \beta_{k-1}^*).$$

Для получения более общего результата дадим оценки сверху коэффициентам ряда (3.87), предполагая при этом закон распределения входного процесса нормальным.

Для оценки $M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right]$ необходимо определить дисперсию коэффициентов раз-

ложения $\beta_{ки}^*$

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^{*2} \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty M \left[\overset{\circ}{x}(t - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau - \tau_1) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2) \overset{\circ}{x}(t - \tau_2 - \tau_3) \right] \times \quad (3.88) \\ \times h(\tau) h(\tau_2) L_j(\tau_1, \alpha) L_j(\tau_3, \alpha) d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \beta_j^2$$

Выражение для оценки дисперсии коэффициентов разложения $M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^{*2} \right]$

удобнее записать в виде:

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^{*2} \right] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) |W_k(j\omega_2)|^2 |W[j(\omega_1 + \omega_2)]|^2 d\omega_1 d\omega_2 + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_x(\omega_1) S_x(\omega_2) W_k(j\omega_2) W_k(j\omega_1) |W[j(\omega_1 + \omega_2)]|^2 d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.89)$$

где $W_k(j\omega) = \alpha \int_0^{\infty} L_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau$ - частотная характеристика идеального фильтра Лагерра k-ого порядка.

$$\text{Если } W(j\omega_1) = \frac{1}{1 + j\omega_1 T}, \text{ т.е. представляет собой фильтр нижних частот, то} \\ M \left[\overset{\circ}{\beta}_k^{*2} \right] \leq 8 \frac{\tau_k^{(2)}}{T} \sigma_x^4 = 8 \Theta, \quad (3.90)$$

где $\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau$ - интервал корреляции случайного процесса;

$$\Theta = \frac{\tau_k^{(2)}}{T} \sigma_x^4.$$

Аналогично получим оценки сверху следующих выражений, входящих в коэффициенты разложения ряда (3.87):

$$M \left[\left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 \right] \leq 8 \Theta;$$

$$M \left[\left(\overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* \right)^2 \right] \leq 19 \Theta;$$

$$M \left[\left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* \right)^2 \right] \leq 32 \Theta;$$

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + 2\overset{\circ}{\beta}_{(k+1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] \leq 19 \Theta;$$

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k+2)и}^* \right) \right] \leq 16 \Theta;$$

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - 2\overset{\circ}{\beta}_{(k-1)и}^* + \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* \right) \right] \leq 11 \Theta;$$

$$M \left[\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* \left(\overset{\circ}{\beta}_{ки}^* - \overset{\circ}{\beta}_{(k-2)и}^* \right) \right] \leq 11 \Theta.$$

Подставив найденные оценки в выражения для коэффициентов ряда (3.87), окончательно получим:

$$\begin{aligned} M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial c_j^2} \right] &\leq \frac{2}{\alpha} \beta_j^2 + \frac{16}{\alpha} \Theta; \\ M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_0^2} \right] &\leq \frac{1}{2\alpha^3} \sum_{k=0}^m (\beta_k + \beta_{k+1})^2 + \frac{27}{2\alpha^3} \Theta (m+1); \\ M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_j^2} \right] &\leq \frac{1}{2\alpha^3} \sum_{k=j}^m (\beta_{k-1} - \beta_{k+1})^2 + \frac{35}{2\alpha^3} \Theta (m+1-j); \\ M \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda_j^2} \right] &\leq \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=j}^m (\beta_k - \beta_{k-1})^2 + \frac{43}{2\alpha} \Theta (m+1-j). \end{aligned}$$

Подставив найденные оценки коэффициентов в ряд (3.87), получим:

$$\begin{aligned} M[\Delta] = M[\Delta_n^*] + \frac{1}{2\alpha} \sum_{j=0}^m (\beta_j^2 + 8\Theta) \sigma_{c_j}^2 + \\ + \frac{1}{4\alpha^3} \sigma_{\alpha_0}^2 \left\{ \sum_{k=0}^m (\beta_k + \beta_{k+1})^2 + 27 \Theta (m+1) \right\} + \\ + \frac{1}{4\alpha^3} \sum_{j=1}^m \sigma_{\alpha_j}^2 \left\{ \sum_{k=j}^m (\beta_{k-1} - \beta_{k+1})^2 + 35 \Theta (m+1-j) \right\} + \\ + \frac{1}{4\alpha} \sum_{j=1}^m \sigma_{\lambda_j}^2 \left\{ \sum_{k=j}^m (\beta_k - \beta_{k-1})^2 + 43 \Theta (m+1-j) \right\}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

где $M[\Delta_n^*] = \Delta_{\min} + \frac{(m+1)}{\alpha} 8 \Theta$ - погрешность аппроксимации корреляционной функции при условии, что фильтр Лагерра и вся аппаратура идеальна.

Рассмотрим подробнее составляющие полной погрешности.

Первая составляющая $M[\Delta_n^*]$ представляет собой методическую погрешность аппроксимации, которая уменьшается с увеличением членов разложения ряда (3.6). Вторая составляющая, представляющая собой методическую статистическую погрешность, пропорциональна числу членов разложения ряда и параметру $\Theta = \frac{\tau_k^{(2)}}{T} \sigma_x^4$ и с увеличением числа членов растет. Однако, выбором значения параметра Θ статистическая методическая погрешность может быть сведена к сколь угодно малой величине. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $T \gg \tau_k^{(2)}$.

Для оценки составляющих, вызванных разбросом параметров аппаратуры, необходимо найти оценки сверху следующих выражений:

$$\begin{aligned} \beta_j^2 &\leq 4 \sigma_x^4; \\ (\beta_{k-1} - \beta_{k+1})^2 &\leq 10 \sigma_x^4; \\ (\beta_k + \beta_{k+1})^2 &\leq 4 \sigma_x^4; \\ (\beta_k - \beta_{k-1})^2 &\leq 16 \sigma_x^4. \end{aligned}$$

При дальнейших исследованиях перейдем к относительной погрешности аппроксимации, определив её в виде:

$$\delta = \frac{M[\Delta]}{\int_0^{\infty} K_x^2(\tau) d\tau} = \frac{M[\Delta]}{\sigma_x^4 \tau_k^{(4)}}. \quad (3.92)$$

где $\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau$ - интервал корреляции.

Введем следующие обозначения:

$$\chi_{c_j}^2 = \sigma_{c_j}^2 / c_j, \chi_{\alpha_j}^2 = \sigma_{\alpha_j}^2 / \alpha_j, \chi_{\lambda_j}^2 = \sigma_{\lambda_j}^2 / \lambda_j, \Omega = \alpha \tau_k^{(4)} \text{ и } \Theta_1 = \Theta / \sigma_x^4.$$

Тогда, после промежуточных преобразований, получим:

$$\delta = \delta_{\min} + \left\{ 8(m+1)\Theta_1 + [4(m+1) + 8(m+1)\Theta_1] \chi_c^2 + [4(m+1) + 27(m+1)\Theta_1] \chi_{\alpha 0}^2 / 4 + [10m(m+1) + 35m(m+1)\Theta_1] \chi_{\alpha}^2 / 8 + [16m(m+1) + 43m(m+1)] \chi_{\lambda}^2 / 8 \right\} / \Omega. \quad (3.93)$$

Это выражение дает возможность дать оценку сверху полной относительной погрешности аппроксимации, если известен разброс и значения параметров коррелометра, относительная методическая погрешность аппроксимации, алгоритм определения параметра α .

Для упрощения аналитических исследований определим α в результате решения уравнения (см. подраздел 3.4)

$$\int_0^{\infty} \alpha L_0(\tau, \alpha) K_x(\tau) d\tau - \sigma_x^2 = 0. \quad (3.94)$$

Применив к уравнению (3.94) неравенство Буняковского, получим:

$$\alpha \sqrt{\int_0^{\infty} L_0^2(\tau, \alpha) d\tau} \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau \geq 1. \quad (3.95)$$

Отсюда видно, $\alpha \tau_k^{(4)} = \Omega \geq 1$. Поскольку Ω в выражении (3.93) находится в знаменателе, возьмем $\Omega = 1$.

Положив $\chi_{c_j}^2 = \chi_{\alpha_j}^2 = \chi_{\lambda_j}^2 = \chi^2$, представим относительную погрешность в виде двух составляющих:

$$\delta = \delta_{\text{сист}} + \delta_{\text{сл}}, \quad (3.96)$$

где

$$\delta_{\text{сист}} = \delta_{\min} + \chi^2 [5(m+1) + 13m(m+1)/4] - \quad (3.97)$$

систематическая составляющая погрешности;

$$\delta_{\text{сл}} = 8(m+1)\Theta_1 + \chi^2 [59(m+1)/4 + 78m(m+1)/8] \Theta_1 - \quad (3.98)$$

случайная составляющая погрешности.

Систематическая составляющая погрешности представляет собой аддитивную смесь относительной погрешности аппроксимации δ_{\min} , величина которой обеспечивается минимальной соответствующим выбором параметров модели (3.6), и аппаратной погрешности, величина которой зависит от среднеквадратической погрешности, параметров фильтра и числа членов разложения ряда.

Случайная составляющая погрешности также представляет собой аддитивную смесь статистической методической погрешности, которая имеет место при идеальной аппаратуре, и погрешности, обусловленной неидеальностью аппаратуры.

Из выражения (3.98) видно, что неидеальность аппаратуры вызывает незначительное увеличение случайной составляющей погрешности, и что всегда может быть сделана сколь угодно малой соответствующим выбором постоянной времени T .

Наибольшее влияние аппаратурная погрешность оказывает на систематическую составляющую погрешности. Причем, это влияние тем сильнее, чем больше среднеквадратическая погрешность параметров и число членов разложения ряда (3.6). Это, в свою очередь, при большом числе членов разложения будет вызывать необходимость наложения более жестких требований на точность аппаратуры.

Полученные соотношения позволяют по допустимой погрешности аппроксимации в каждом конкретном случае рассчитать основные параметры коррелометра.

3.8. Аппроксимация взаимных корреляционных функций

Взаимная корреляционная функция определяется как корреляционный момент значений двух случайных функций, соответствующих выбранным значениям аргументов t и t' [45]:

$$K_{xy}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right], \quad (3.99)$$

и является характеристикой степени линейной связи $x(t)$ и $y(t)$.

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, то случайные процессы называются **коррелированными**. В противном случае процессы называются **некоррелированными**.

Часто, при решении различных прикладных задач, используют нормированную взаимную корреляционную функцию, которую с учетом свойств взаимной корреляционной функции определяют в виде:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D(t')}}. \quad (3.100)$$

Два случайных процесса называются стационарно связанными, если их взаимная корреляционная функция является функцией разности аргументов:

$$K_{xy}(t, t') = K_{xy}(\tau), \quad (3.101)$$

где $\tau = t - t'$.

Из свойств взаимной корреляционной функции следует, что

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau). \quad (3.102)$$

Таким образом, взаимную корреляционную функцию необходимо определять как при положительных, так и отрицательных значениях аргумента τ .

Нормированная взаимная корреляционная функция для стационарно связанных процессов примет вид:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sqrt{D_x} \sqrt{D_y}}. \quad (3.103)$$

Аналогичным образом, как и для стационарных нормальных процессов, можно определить релейную и полярную взаимные корреляционные функции:

$$\bullet R_{xy}(\tau) = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{y}(t - \tau) \right] = k_{\phi} \sigma_x \rho_{xy}(\tau); \quad (3.104)$$

$$\bullet P_{xy}(\tau) = M \left[\text{sign} \overset{\circ}{x}(t) \text{sign} \overset{\circ}{y}(t - \tau) \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{xy}(\tau). \quad (3.105)$$

Учитывая большое разнообразие взаимокорреляционных функций, представляется более целесообразным искать модель в виде ортогонального ряда (3.6). Отличие заключается в том, что необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимокорреляционной функции.

Аппроксимативная модель в этом случае примет вид:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,\text{п}} l(\tau) L_k(\tau, \alpha) + \sum_k^m \beta_{k,\text{л}} l(-\tau) L_k(-\tau, \alpha), \quad (3.106)$$

$$\text{где } l(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 0, & \text{при } \tau < 0; \end{cases} \text{ и } l(-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau > 0; \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0; \\ 1, & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения определяются в соответствии с выражениями:

$$\beta_{k,\text{п}} = \alpha \int_0^{\infty} K_{xy}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (3.107)$$

$$\beta_{k,\text{л}} = \alpha \int_0^{\infty} K_{yx}(\tau) L_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (3.108)$$

Как показано в [9], условие для минимизации погрешности аппроксимации связано с выполнением равенства

$$-\frac{m+1}{\alpha^2} (\beta_{m,\text{п}} \beta_{m+1,\text{п}} + \beta_{m,\text{л}} \beta_{m+1,\text{л}}) = 0. \quad (3.109)$$

Так как первый множитель отличен от нуля, для значения параметра α определяется в результате решения уравнения

$$(\beta_{m,\text{п}} \beta_{m+1,\text{п}} + \beta_{m,\text{л}} \beta_{m+1,\text{л}}) = 0. \quad (3.110)$$

На рис. 3.23 приведена структура взаимного коррелометра с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра, определяющего параметры модели в соответствии с алгоритмами (3.107), (3.108) и (3.110).

Коррелометр содержит два идентичных канала А и Б, каждый из которых, в свою очередь, включает фильтр Лагерра $m+1$ порядка, имеющий звенья нулевого порядка 1 и «бесконечной» полосы, блоки умножения 3, 6, 7, блоки усреднения 4, блок регулировки параметра 5.

Коррелометр работает следующим образом. При подаче на входы коррелометра двух стационарно связанных случайных процессов сигналы на выходах усредняющих устройств 4 будут определяться выражениями: (3.107) – блок А, (3.108) – блок Б. Блок регулировки параметра 5 при этом будет изменять параметр ячеек фильтров Лагерра α до установления нулевого сигнала на выходах сумматора 8 (см. (3.110)). Полученные в результате величины $\beta_{k,\text{п}}$ и $\beta_{k,\text{л}}$ берутся в качестве оценки коэффициентов ряда (3.106).

Таким образом, предложенный коррелометр осуществляет определение коэффициентов разложение модели взаимной корреляционной функции, обеспечивает минимум квадратической погрешности аппроксимации.

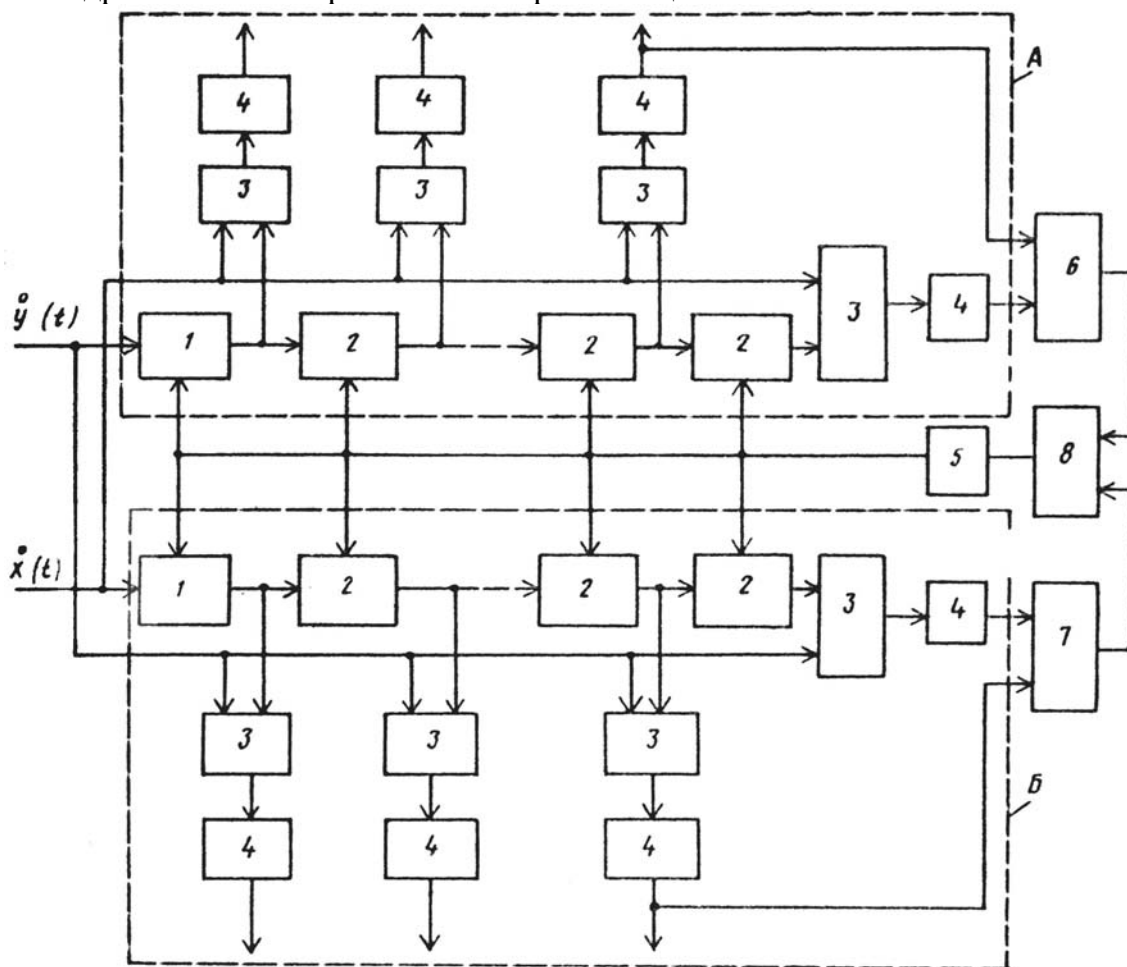
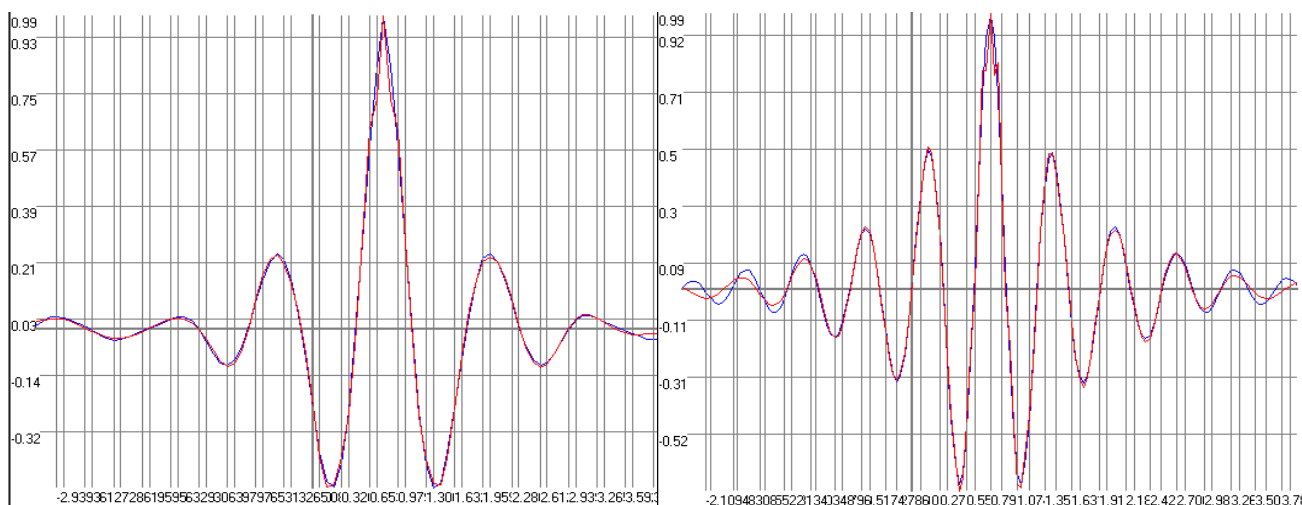


Рисунок 3.23. Взаимный коррелометр с аппроксимацией ортогональными функциями Лагерра

Результаты аппроксимации корреляционной функций приведены на рис. 3.24.



а) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$

б) $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} (\cos 8\tau + 0,125 \sin 8|\tau|)$

Рисунок 3.24. Результаты аппроксимации