

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ДЕТЕКТОРАХ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В.Б.Брагинский, Ю.И.Воронцов, Ф.Я.Халили

При непрерывном измерении прибором, гамильтониан взаимодействия которого с гравитационной антенной пропорционален мгновенной координате, чувствительность детектора имеет принципиальный предел. Необходимо использовать режим импульсного измерения координаты.

В десяти лабораториях нескольких стран создается второе поколение гравитационных детекторов веберовского типа, обладающих чувстви-

тельностью достаточной для обнаружения всплесков гравитационного излучения от гипотетических астрофизических источников, расположенных вне нашей Галактики. В качестве антенн применяются глубоко охлажденные массивные алюминиевые цилиндры или относительно легкие цилиндры из диэлектрических монокристаллов, а в качестве преобразователей механических колебаний в электрические предполагается использовать либо емкостные датчики, либо СКВИД'ы [1 – 4]. Чувствительность детекторов гравитационных волн определяется процессами релаксации в самой антенне и флуктуациями в измерительной цепи. Если время релаксации колебаний антенны достаточно велико, а ее температура – низка, то определяющую роль играют ошибки измерений. При таких условиях чувствительность к ускорению детектора с указанными датчиками, работающими в обычном непрерывном режиме, равна в квантовом пределе [1 – 5]

$$\left(\frac{F}{m}\right)_{\min} \approx \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{m}} \quad (1)$$

($\hbar$ – постоянная Планка; ω , m – собственная частота и эквивалентная масса антенны; τ – время действия цуга волн с частотой $\approx \omega$).

С другой стороны, известно, что если бы датчик позволял определять изменение энергии антенны с точностью до $\hbar \omega$ (возможность такого измерения в квантовой механике допускается [6]), то чувствительность была бы равна [7]:

$$\left(\frac{F}{m}\right)_{\min} \approx \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{m n}} \quad (2)$$

где $n \gg 1$ – начальное значение квантового числа. В этом случае, в отличие от (1), с увеличением n чувствительность, формально растет неограниченно.

Цель этой статьи – показать в чем причина ограничения чувствительности в первом случае и сформулировать условия реализации оптимального квантового измерителя в гравитационном детекторе.

Обнаружение воздействия на осциллятор состоит в сравнении величин амплитуды (энергии), фазы или мгновенной координаты до и после воздействия. Чувствительность измерения тем выше, чем точнее измеряется одна из перечисленных величин и чем точнее при отсутствии воздействия она повторяется при повторных измерениях. Точность измерения определяется не только флуктуациями в измерительном приборе, но и видом взаимодействия измерительного устройства с осциллятором [8]. Если, например, целью является измерение энергии колебаний осциллятора, а гамильтониан взаимодействия с измерительным устройством пропорционален мгновенной координате (как это имеет место в случае емкостного датчика и СКВИД'а), то ошибка измерения энергии в лучшем случае будет равна $\sqrt{n}$ квантов [6]. Этот результат является прямым следствием соотношения неопределенности

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

Используемые в гравитационных детекторах датчики могут служить для точного измерения мгновенной координаты. Но если они работают в непрерывном режиме, то ошибка измерения текущего значения координаты будет иметь определенный предел. Действительно, измерение координаты сопровождается возмущением импульса, которое увеличивает неопределенность координаты в последующие моменты времени. Минимальную ошибку непрерывного измерения Δx_{min} текущего значения координаты можно определить исходя из известной минимальной ошибки измерения энергии. Величина Δx_{min} является одновременно ошибкой определения амплитуды колебаний. Следовательно, должно выполняться условие

$$m\omega^2 \Delta x_{min} \sqrt{2n\hbar\omega/m\omega^2} = \sqrt{n}\hbar\omega, \quad (4)$$

т.е.

$$\Delta x_{min} = \sqrt{\hbar/2m\omega}. \quad (5)$$

Соотношение (5) определяет минимальную ошибку измерения текущего значения координаты и амплитуды осциллятора при непрерывном измерении прибором, гамильтониан взаимодействия которого с осциллятором пропорционален мгновенной координате.

Под действием силы $F \cos(\omega t + \phi)$ среднее значение энергии осциллятора, находившегося в остоянии с неопределенной фазой, меняется

на $\epsilon_F = \frac{(F\tau)^2}{8m}$, а неопределенность энергии увеличивается на [9]

$$\Delta\epsilon_F = \sqrt{2n\hbar\omega\epsilon_F}, \quad (6)$$

что эквивалентно среднеквадратическому изменению амплитуды колебаний

$$\delta x_F = \frac{F\tau}{2\sqrt{2}m\omega}. \quad (7)$$

Из условия $\delta x_F \geq \Delta x_{min}$ или $\Delta\epsilon_F \geq \sqrt{n\hbar\omega}$, получим соотношение (1). Ограничение чувствительности соотношением (1) является следствием неоптимальности метода измерения. Для достижения чувствительности превышающей предел (1) необходимо либо искать датчик, гамильтониан взаимодействия которого с антенной диагонален в энергетическом представлении, либо известные датчики использовать в другом режиме.

Гармонический осциллятор обладает следующим важным свойством: его волновой пакет повторяется с периодом $2\pi/\omega$. Внешняя сила вызывает изменение среднего (по ансамблю) значения мгновенной координаты в моменты $t_k = 2\pi k/\omega$ (k — целое) на величину

$$\delta x_F = (F\tau/2m\omega) \sin \phi. \quad (8)$$

В формуле (8) фаза отсчитывается от момента первого измерения координаты. Чувствительность метода определяется точностью измерения начального ($t = 0$) и конечного $t = t_K$ значений координаты. Рассмотрим случай, когда для приготовления начального состояния и для измерения конечной координаты используется одна и та же процедура измерения среднего за время измерения $t_{\text{и}} \ll \omega^{-1}$ значения координаты. Минимальная ошибка измерения координаты определяется двумя противоположными тенденциями. С увеличением времени измерения $t_{\text{и}}$, с одной стороны, растет точность измерения, с другой стороны, увеличивается расплывание волнового пакета. Связанное с возмущением импульса увеличение ширины волнового пакета при $t_{\text{и}} \ll \omega^{-1}$ будет

$$\text{равно } \frac{\Delta p_{\text{и}}}{2m} = \hbar t_{\text{и}} / 4m \Delta x_p \quad (\Delta x_p - \text{ширина пакета, определяемая его}$$

редукцией при измерении). Ошибка в определении среднего значения координаты будет равна

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_p)^2 + (\hbar t_{\text{и}} / 4m \Delta x_p)^2} . \quad (9)$$

При $\Delta x_p = \sqrt{\hbar t_{\text{и}} / 4m}$ величина Δx будет минимальной [10]

$$\Delta x_{\min} = \sqrt{\hbar t_{\text{и}} / m} . \quad (9a)$$

Соответственно, ошибка измерения разности координат в момент $t = 0$ и $t = t_K$ будет равна

$$\sqrt{2} \Delta x_{\min} = \sqrt{\frac{\hbar t_{\text{и}}}{m}} . \quad (10)$$

Из соотношений (8) и (10) найдем

$$\left(\frac{F}{m} \right)_{\min} \approx \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{m}} \omega t_{\text{и}} . \quad (11)$$

Величина $\omega t_{\text{и}}$ может быть сколь угодно малой, поэтому, формально, чувствительность данного метода ограничивается только релятивистскими эффектами. Соотношение (9a) справедливо при $\Delta x_{\min} \gg \hbar / mc$ (c — скорость света) [11]. Формула (11), строго говоря, относится к гармоническому осциллятору с одной степенью свободы. Антенны в гравитационных детекторах имеют множество собственных частот, которые могут возбуждаться при импульсном измерении. Однако, если частоты эквидистантны, то периодичность повторения среднего значения и неопределенности координаты торца антенны сохранится. Следует подчеркнуть, что при непрерывном измерении амплитуда колебаний ос-

циллятора возмущается на $\sqrt{\hbar/2m\omega}$, а при импульсном (стробирующем)

на $\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega^2 t_n}}$. Т.е. стробирующее измерение вызывает существенный

"нагрев" антенны. Этот эффект может быть одной из технических причин ограничения чувствительности. Достижение чувствительности, соответствующей формуле (11) возможно при $\sin\phi \approx 1$. Поскольку фаза гравитационного импульса не детерминирована, то для сохранения высокого уровня чувствительности нужны два гравитационных детектора, в которых измерения проводятся со сдвигом по времени равным $\pi/2\omega$.

Как показал анализ, все изложенные выше принципиальные положения сохраняют силу и в том случае, когда учитываются тепловые флуктуации в датчике и усилителе. В случае емкостного датчика в написан-

ных выше соотношениях следует заменить $\hbar$ на $\frac{2\kappa T_{\text{эфф}}}{\Omega}$, где Ω — рабочая частота датчика, $\kappa T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{\hbar\Omega}{\exp(\hbar\Omega/\kappa T) - 1}$, κT — энергия

тепловых колебаний в датчике. Шумовая температура усилителя также считалась равной $T_{\text{эфф}}$.

Резюмируя изложенное подчеркнем, что использование обычных датчиков в режиме периодического измерения мгновенной координаты позволяет обойти предел чувствительности (1) характерный для режима непрерывного измерения.

Московский
государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28 января 1978 г.

Литература

- [1] R.P.Giffard. Phys. Rev., D14, 2478, 1976.
- [2] D.H.Douglass. Proc.Conf. Experimental Gravitation Ed. BV B. Bertotti, Academic Press, 1977.
- [3] В.Б.Брагинский. Gravitational Radiation and Gravitational Collapse. Proc. Iav. ed. Dewitt — Morette, 1974.
- [4] В.Б.Брагинский, А.Б.Манукин. Измерение малых сил в физических экспериментах, М., изд. Наука, 1974.
- [5] А.В.Гусев, В.Н.Руденко. ЖЭТФ, 72, 1217, 1977.
- [6] В.Б.Брагинский, Ю.И.Воронцов, Ф.Я.Халили. ЖЭТФ, 4/10/. 1977.
- [7] В.Б.Брагинский. Физические эксперименты с пробными телами. М., изд. Наука, 1970.

[8] Д.Бом. Квантовая теория. Физматгиз, 1961.

[9] В.Д.Кривченков, И.И.Гольдман. Сб. задач по квантовой механике.
М., Гостехиздат, 1957.

[10] В.Б.Брагинский, Ю.И.Воронцов. УФН, 114, 41, 1974.

[11] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Релятивистская квантовая механика.
