

ЭКОНОМИКА ТРАНСПОРТНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

МЕТОД ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается метод экспоненциальной аппроксимации для линейного программирования в применении к задачам планирования транспортной деятельности. Идея метода состоит в том, что исходная линейная задача заменяется нелинейной задачей с экспоненциальной целевой функцией и малым параметром, решение которой является приближением с заданной точностью решений исходной и двойственной линейных задач. Приведены теоремы сходимости и решение конкретной вычислительной задачи.

Метод экспоненциальной аппроксимации сформировался в процессе решения практических задач эффективного использования и формирования парка самолётов большой размерности в отрасли гражданской авиации [1]. Эти задачи относятся к линейному программированию и имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad x_{ij} \in X,$$

где i – тип самолёта, j – авиалиния, m – количество типов самолётов, n – количество авиалиний, c_{ij} – эксплуатационные расходы, x_{ij} – количество самолётов.

Множество X задаётся моделью функционирования парка самолётов, которая содержит следующие основные ограничения:

1. Условие выполнения запланированного объёма перевозок по каждой авиалинии $\sum_{i=1}^m p_{ij} x_{ij} \geq p_j, \quad j = 1, \dots, n,$ где

p_j – планируемый объём перевозок, p_{ij} – производительность.

2. Количество распределяемых самолётов не должно быть больше имеющегося парка самолётов $\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq g_i, \quad i = 1, \dots, m.$

3. Условия неотрицательности переменных $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$

Идея метода состоит в том, что исходная линейная задача заменяется нелинейной задачей с экспоненциальной целевой функцией и малым параметром, решение которой является приближением с заданной точностью решений исходной и двойственной линейных задач. Аппроксимирующая задача имеет следующий вид:

ГОРДУНОВСКИЙ В.М.

Кандидат технических наук, доцент
Московский государственный институт международных отношений (университет)
МИД России, г. Москва

Ключевые слова: метод экспоненциальной аппроксимации, линейное программирование, планирование транспортной деятельности

$$\sum_{j=1}^n p_j \lambda_{pj} - \sum_{i=1}^m g_i \lambda_{gi} - \varepsilon \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e^{((p_{ij} \lambda_{pj} - \lambda_{gi} - \varepsilon)/\varepsilon)} \rightarrow \max,$$

$$x_{ij} = e^{((p_{ij} \lambda_{pj} - \lambda_{gi} - \varepsilon)/\varepsilon)}, \lambda_{pj} \geq 0, \lambda_{gi} \geq 0.$$

Здесь λ_{pj} – двойственные переменные, связанные с ограничениями по объёмам перевозок, λ_{gi} – двойственные переменные, связанные с ограничениями по парку самолётов, x_{ij} – исходные переменные, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \varepsilon$ – малый параметр, $\varepsilon > 0$.

Для обоснования метода рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$CX \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$AX \geq B^T, X \geq 0,$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор переменных исходной задачи, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор коэффициентов линейной формы, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – вектор ограничений, $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ – матрица коэффициентов. Для доказательства сходимости необходимо, чтобы допустимое множество было ограничено. Для этого можно ввести дополнительные ограничения на максимально возможные значения переменных $x_{ij}^{\max}$, которые определяются из содержания задачи, а также заменить исходные переменные x_{ij} на

$$x_{ij}^{\text{нов}} = \frac{x_{ij}}{x_{ij}^{\max}}.$$

Без потери общности будем считать, что эти изменения учтены в задаче (1). Таким образом, допустимое множество задачи (1) ограничено, а переменные принимают значения $x_{ij} \leq e^{-1}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Задаче (1) соответствует следующая двойственная задача:

$$B\lambda \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$A^T \lambda \leq C^T, \lambda \geq 0,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$ – вектор двойственных переменных.

Исходная задача заменяется аппроксимирующей:

$$CX + \varepsilon \mathcal{G}(X) \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$AX \geq B^T, X > 0,$$

где $\mathcal{G}(X) = \sum_{j=1}^n x_j \ln(x_j)$, ε – малый параметр, $\varepsilon > 0$. Целевая

функция (3) строго выпукла, область допустимых решений – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество.

Необходимые условия стационарности Куна-Таккера для (3) имеют следующий вид:

$$c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i + \varepsilon + \varepsilon \ln x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$AX \geq B^T, \quad (4)$$

$$X > 0,$$

$$\lambda \geq 0.$$

Так как целевая функция и область допустимых решений выпуклы, то необходимые условия Куна-Таккера являются также и достаточными. Из уравнений (4) имеем:

$$x_j = e^{((\sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - c_j - \varepsilon)/\varepsilon)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Из этого следует, что $X > 0$. Функция Лагранжа для аппроксимирующей задачи (3) будет иметь вид:

$$B\lambda - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j, \quad \lambda \geq 0.$$

Двойственная задача к аппроксимирующей (3) с учётом выражений (5) для x_j преобразуется к виду:

$$B\lambda - \varepsilon \sum_{j=1}^n e^{((\sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_i - c_j - \varepsilon)/\varepsilon)} \rightarrow \max, \quad \lambda \geq 0. \quad (6)$$

Если в исходной линейной задаче (1) есть ограничения в виде равенств, то соответствующие двойственные аппроксимирующие переменные λ не имеют ограничений. Целевая функция задачи (6) имеет непрерывные производные любого порядка. Это свойство позволяет эффективно применять для поиска решения градиентные методы. Сходимость метода к решению исходных прямой и двойственной линейных задач по параметру ε доказана теоремами, приведенными ниже.

Оптимальные решения прямой (3) и (6) двойственной аппроксимирующих задач обозначим $X^*(\varepsilon)$ и $\lambda^*(\varepsilon)$. Соответственно X^* и λ^* – оптимальные решения прямой (1) и двойственной (2) исходных задач.

Теорема 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $CX^*(\varepsilon) \rightarrow CX^*$.

Целевая функция прямой аппроксимирующей задачи (3) выпукла, а область её допустимых решений совпадает с областью допустимых решений исходной задачи (1).

Решение задачи (3) при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет системе ограничений исходной (1) и аппроксимирующей задачи (3). Это является доказательством того, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $CX^*(\varepsilon) + \varepsilon \mathcal{G}(X^*(\varepsilon)) \rightarrow CX^*$ и $CX^*(\varepsilon) \rightarrow CX^*$.

Теорема 2. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $X^*(\varepsilon) \rightarrow X^*$. Предположим, что последовательность решений $X^*(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (3) на компакте имеет предел X^0 , не равный X^* , тогда $CX^0 - CX^* = \text{const}$, что противоречит теореме 1. Предположение не верно, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ $X^*(\varepsilon) \rightarrow X^*$.

Теорема 3. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $B\lambda^*(\varepsilon) \rightarrow B\lambda^*$.

Рассмотрим ограничения (4) для аппроксимирующей задачи (3) $c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i + \varepsilon + \varepsilon \ln x_j = 0$, $j=1, 2, \dots, n$.

Учитывая, что $X^*(\varepsilon) \leq e^{-1}$ при любом $\varepsilon > 0$, получим

$$c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i^*(\varepsilon) \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \text{ Эти условия совпадают}$$

с ограничениями $A^T\lambda \leq C^T$ исходной двойственной линейной задачи. Целевая функция двойственной аппроксимирующей задачи (6) выпукла вверх, а область её допустимых решений совпадает с областью допустимых решений исходной двойственной задачи (2). Решение задачи (6) при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет системе ограничений исходной двойственной (2) и аппроксимирующей задачи (6). Это является доказательством того, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $B\lambda^*(\varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon) \rightarrow B\lambda^*$ и $B\lambda^*(\varepsilon) \rightarrow B\lambda^*$.

Теорема 4. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $\lambda^*(\varepsilon) \rightarrow \lambda^*$.

Предположим, что последовательность решений $\lambda^*(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (6) на компакте имеет предел λ^0 , не равный λ^* , тогда $B\lambda^0 - B\lambda^* = \text{const}$, что противоречит теореме 3. Предположение не верно, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\lambda^*(\varepsilon) \rightarrow \lambda^*$.

Погрешность вычисления оптимального решения зависит от величины малого параметра ε . При решении практических задач, задавшись приемлемой погрешностью, можно определить соответствующее значение малого параметра, обеспечивающее эту погрешность. Для определения соотношения между малым параметром и отклонением от оптимального решения можно воспользоваться следствием из теорем сходимости.

Следствие: Будем рассматривать случай, когда все коэффициенты целевых функций прямой и двойственной исходных задачи – неотрицательны. Это означает, что $CX^*(\varepsilon) \leq 0$, $CX^*(\varepsilon) \geq 0$, $B\lambda^*(\varepsilon) \geq 0$, $B\lambda^* \geq 0$. Из теорем 1 и 3 имеем при $\varepsilon \rightarrow 0$ $CX^*(\varepsilon) \rightarrow CX^*$ и $B\lambda^*(\varepsilon) \rightarrow B\lambda^*$. Учитывая, что любое допустимое неоптимальное решение прямой задачи будет больше оптимального, а двойственной – меньше, получим $CX^*(\varepsilon) > CX^*$ и $B\lambda^*(\varepsilon) > B\lambda^*$. К обеим частям этих неравенств добавим

соответственно $\varepsilon \vartheta(X^*(\varepsilon))$ и $-\varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon)$, получим

$$CX^*(\varepsilon) + \varepsilon \vartheta(X^*(\varepsilon)) > CX^* + \varepsilon \vartheta(X^*(\varepsilon)),$$

$$B\lambda^*(\varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon) < B\lambda^* - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon).$$

Оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной аппроксимирующих задач равны между собой. То есть

$$CX^*(\varepsilon) + \varepsilon \vartheta(X^*(\varepsilon)) = B\lambda^*(\varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon).$$

Подставим это равенство в левые части двух предыдущих неравенств. Сделав необходимые преобразования, получим окончательно следующие два неравенства:

$$CX^*(\varepsilon) - CX^* < -\varepsilon \vartheta(X^*(\varepsilon)) - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon),$$

$$B\lambda^* - B\lambda^*(\varepsilon) < -\varepsilon \vartheta(X^*(\varepsilon)) - \varepsilon \sum_{j=1}^n x_j^*(\varepsilon).$$

Эти неравенства определяют отклонение оптимального решения аппроксимирующей задачи от оптимального решения исходной в зависимости от величины малого параметра. Неотрицательные левые части этих неравенств обозначим δ . Правая часть ограничена сверху линейной функцией $e^{-1}n\varepsilon$. Таким образом, если задана погрешность вычисления δ для целевых функций прямой и двойственной линейных задач, то малый параметр должен лежать в пределах $0 < \varepsilon \leq e^2 n^{-1} \delta$.

Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 0,6x_3 &\rightarrow \min, \\ 2x_1 + 0,3x_2 - 2x_3 &\geq 0,6, \\ -0,2x_1 + 0,9x_2 + x_3 &\geq 0,2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение: $CX^* = 0,5376$, $x_1^* = 0,2581$, $x_2^* = 0,2796$, $x_3^* = 0$.

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} 0,6\lambda_1 + 0,2\lambda_2 &\rightarrow \min, \\ 2\lambda_1 - 0,2\lambda_2 &\leq 1, \\ 0,3\lambda_1 + 0,9\lambda_2 &\leq 1, \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 0,6, \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение: $B\lambda^* = 0,5376$, $\lambda_1^* = 0,5914$, $\lambda_2^* = 0,9140$.

Зададимся погрешностью решения исходной задачи $\delta = 0,01$. Параметр ε вычислим по формуле $\varepsilon = e^2 n^{-1} \delta$, $\varepsilon = 0,025$.

Прямая аппроксимирующая задача ($\varepsilon = 0,025$):

$$x_1 + x_2 + 0,6x_3 + \varepsilon x_1 \ln x_1 + \varepsilon x_2 \ln x_2 + \varepsilon x_3 \ln x_3 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 0,3x_2 - 2x_3 \geq 0,6,$$

$$-0,2x_1 + 0,9x_2 + x_3 \geq 0,2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Двойственная аппроксимирующая задача ($\varepsilon = 0,025$):

$$0,6\lambda_1 + 0,2\lambda_2 - \varepsilon e^{[(2\lambda_1 - 0,2\lambda_2 - 1 - \varepsilon)/\varepsilon]} - \\ - \varepsilon e^{[(0,3\lambda_1 + 0,9\lambda_2 - 1 - \varepsilon)/\varepsilon]} - \varepsilon e^{[(-2\lambda_1 + \lambda_2 - 0,6 - \varepsilon)/\varepsilon]} \rightarrow \max,$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Решая эту задачу, находим приближённые оптимальные значения переменных и целевых функций пря-

мой и двойственной линейных задач: $\lambda_1^*(\varepsilon) = 0,5864$, $\lambda_2^*(\varepsilon) = 0,9080$, $B\lambda^*(\varepsilon) = 0,5334$, $x_1^*(\varepsilon) = 0,2581$, $x_2^*(\varepsilon) = 0,2796$, $x_3^*(\varepsilon) = 0$, $CX^*(\varepsilon) = 0,5376$.

Таким образом, при $\varepsilon = 0,025$ погрешность вычисления оптимального значения целевой функции исходной прямой задачи равна $CX^*(\varepsilon) - CX^* = 0,5376 - 0,5376 < 0,01$, а двойственной $-B\lambda^* - B\lambda^*(\varepsilon) = 0,5376 - 0,5334 < 0,01$.

Задача решена программой-надстройкой «Поиск решения» табличного процессора Excel MS Office 2007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордуновский В.М. Метод экспоненциальной аппроксимации для линейного программирования в приложении к задачам планирования транспортной деятельности // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. М., 1984.