Гордуновский В.М., доцент
Самохвалов С.Ю., доцент
Кафедра Математических методов и информационных технологий
МГИМО (У) МИД России

Некоторые задачи многокритериальной оптимизации пакета инвестиционных проектов.

Рассмотрим две постановки задач оптимизации пакета инвестиционных проектов в условиях ограниченности финансовых ресурсов. Обозначим за x_i долю участия фирмы-инвестора в проекте i ($i=1,\ldots,m$). Если фирма не участвует в проекте, то её доля участия равна нулю, если полностью финансирует проект, то единице. То есть, неизвестная переменная $x_{i,}$, может изменяться от нуля до единицы. Проекты генерируют денежный поток, который определяется разностью между притоками средств R_t и оттоками E_t в периоды времени t, на которые разбит интервал, характеризующий глубину планирования инвестиции ($t=0,\ldots,n$). Если обозначить за S_t сумму средств, которыми располагает фирма для инвестирования в период t, то денежный поток C_t=R_t-E_t в сумме для всех проектов, составляющих пакет инвестиций, должен быть равен S_t. Поскольку денежный поток распределён во времени, его дисконтирование производится по процентной ставке r. Часто для формирования пакета инвестиций в качестве целевой функции используется критерий чистой приведенной стоимости NPV. Тогда целевая функция представляет собой текущую стоимость денежных притоков за вычетом текущих денежных оттоков в сумме по всем проектам, составляющим пакет инвестиций. Постановка задачи при этом имеет следующий вид:

$$NPV = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=0}^{n} (R_{it} - E_{it})(1+r)^{-t} x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m} (R_{it} - E_{it}) x_i \le S_t, \; t = 0,\ldots,n;$$

$$0 \le x_i \le 1.$$

В следующей постановке при формировании пакета инвестиций применяется индекс рентабельности *PI*, и математическая модель задачи имеет вид:

$$PI = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} R_{it}(1+r)^{-t}x_i \Big/ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{n} E_{it}(1+r)^{-t}x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m}(R_{it}-E_{it})x_i \le S_t,\ t=0,\ldots,n;$$

$$0 \le x_i \le 1.$$

Оптимальное решение в первой постановке может отличаться от решения во второй. Это связано с тем, что *PI* является относительным показателем, а *NPV*—абсолютным, не учитывающим в явном виде отдачу от объёма вложенных средств. Как правило, задача оптимизации пакета инвестиций не может быть полностью охарактеризована с помощью одного-единственного показателя эффективности. Привлечение нескольких критериев эффективности приводит к необходимости их увязки и применению методов многокритериальной оптимизации.

Метод свёртывания критериев определяет способ составления «обобщённого показателя эффективности», представляющий собой «взвешенную сумму» частных показателей K_j, в которую каждый из них входит со своим «весом» α_j, отражающим его важность:

$$K = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \ldots \to \max;$$

$$\sum_j \alpha_j = 1;\ \alpha_j > 0.$$

Если принять, что $K_1 = NPV$, а $K_2 = PI$, то получим двухкритериальную задачу оптимизации пакета инвестиций методом свёртывания критериев:

$$\alpha_1 NPV + \alpha_2 PI \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m}(R_{it}-E_{it})x_i \le S_t,\ t=0,\ldots,n;$$

$$0 \le x_i \le 1.$$

Весовые коэффициенты α_j задаются экспертным путём. Производится расчёт оптимального решения. Затем, в зависимости от результата, лицо, принимающее решение может изменить коэффициенты α_j, и расчёт повторяется вновь.

Другой часто применяемый способ свести многокритериальную задачу к однокритериальной—это выделить один (главный) критерий эффективности K_j и стремиться обратить его в максимум, а на все остальные, наложить только некоторые ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше каких-то заданных значений k_j. Например, при оптимизации пакета инвестиций можно потребовать, чтобы чистая приведенная стоимость *NPV* была максимальной, а индекс рентабельности *PI* был бы не ниже среднего по отрасли *pi(ср.)*:

$$NPV \to \max;$$

$$PI \geq pi(cp.)$$

$$\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - E_{it})x_i \leq S_t, \; t = 0,\ldots,n;$$

$$0 \leq x_i \leq 1.$$

Нижняя граница для показателя *PI* задаётся экспертным путём. Поправки в это ограничение тоже могут быть введены лицом, принимающим решение в «диалоговом режиме».

Рассмотрим способ построения компромиссного решения методом «последовательных уступок». Показатели эффективности K_j располагаются в порядке убывающей важности. Сначала ищется решение, обращающее в максимум первый (важнейший) показатель $K_1=K_1^*$. Затем назначается, исходя из практических соображений, с учётом малой точности, с которой нам известны исходные данные, некоторая «уступка» ΔK_1, которую можно сделать для того, чтобы максимизировать второй показатель. При максимизации по критерию K_2 вводится ограничение, чтобы при этом критерий K_1 был не меньше, чем $K_1^* - \Delta K_1$, При этом ограничении ищется решение, обращающее в максимум K_2. Далее, снова назначаем «уступку» по критерию K_2, ценой которой можно максимизировать K_3 и т.д. Двухкритериальная задача оптимизации пакета инвестиций решается в два этапа. На первом этапе выберем в качестве первого (главнейшего) показателя критерий NPV:

$$NPV = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}(R_{it} - E_{it})(1+r)^{-t}x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - E_{it})x_i \le S_t,\ t = 0,\ldots,n;$$

$$0 \le x_i \le 1.$$

Решением этой задачи являются оптимальные значения долевого участия в проектах x_i и оптимальная чистая приведенная стоимость пакета инвестиций NPV^*. Назначаем «уступку» ΔNPV и переходим ко второму этапу:

$$PI = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}R_{it}(1+r)^{-t}x_i \Big/ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{n}E_{it}(1+r)^{-t}x_i \to \max;$$

$$NPV \ge NPV^* - \Delta NPV;$$

$$\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - E_{it})x_i \le S_t,\ t = 0,\ldots,n;$$

$$0 \le x_i \le 1.$$

При таком способе построения компромиссного решения на каждом этапе видно, ценой какой «уступки» в одном показателе приобретается выигрыш в другом, и какова величина этого выигрыша.

Так или иначе, при любом способе построения компромиссного решения для многокритериальной задачи оптимизации пакета инвестиций, оно остаётся не до конца формализованным, и окончательный выбор всегда определяется волевым решением лица принимающего решение.