

Решение дифференциального уравнения. Задача Коши.

Интегральные кривые

Квантованный учебный текст по математике, с заданиями в тестовой форме¹. Для студентов технических вузов

Ирина Медведева,

Татьяна Черняева

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Иркутский государственный университет
путей сообщения»

chetn2005@yandex.ru

Решение дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения называют функцию $y = \varphi(x)$, определенную и непрерывную на интервале (a, b) вместе со своими производными до n -го порядка включительно, и обращающую это уравнение в тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Решение ДУ первого порядка

Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ (1) или $y' = f(x, y)$ (2) называют функцию $y = \varphi(x)$, определенную и непрерывную на интервале (a, b) вместе со своей производной y' , и удовлетворяющую данному уравнению.

¹ Под ред. докт. пед. наук проф. В.С.Аванесова

Интегральная кривая

График решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Задача Коши

Пусть при решении дифференциального уравнения заданы дополнительные *начальные условия*:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \quad [y(x_0) = y_0]. \quad (3)$$

Задача нахождения решения ДУ (1)–(2), удовлетворяющего начальному условию (3), называется *задачей Коши* для ДУ первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Общее решение ДУ первого порядка

Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* ДУ первого порядка (1), если она удовлетворяет условиям:

- 1) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной C ,
- 2) при заданных начальных условиях можно подобрать такое значение произвольной постоянной C_0 , при котором функция $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять этим условиям.

Общее решение дифференциального уравнения является результатом решения (интегрирования) данного уравнения.

Если при интегрировании уравнения явно выразить искомую функцию не удастся, то выражение $\Phi(x, y) = C$ называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Частное решение ДУ первого порядка

Решение уравнения (1), полученное из общего при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$ называют *частным решением* этого уравнения.

Общее решение ДУ 1-го порядка – семейство (множество) интегральных кривых.

Частное решение – интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема Коши-Пикара (достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши)

Пусть правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) и имеет непрерывную в этой окрестности частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда уравнение $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Особое решение

Решение $y = \varphi(x)$, в каждой точке которого нарушается единственность задачи Коши, называется *особым* решением.

Особое решение не может быть получено из формулы общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном числовом значении произвольной постоянной C .

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большее число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:

1. ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ

- 1) интегрированием
- 2) дифференцированием

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

2. ЗАДАЧА КОШИ ЕСТЬ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО

- 1) начальным
- 2) граничным

УСЛОВИЯМ

3. РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ ОБЩЕГО ПРИ КОНКРЕТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ, ЕСТЬ РЕШЕНИЕ

- 1) задачи Коши
- 2) общее
- 3) частное

4. ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y' = \frac{1}{y^2}$ УСЛОВИЯ ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

- 1) нарушаются в каждой точке плоскости xOy
- 2) нарушаются на прямой $y = 0$
- 3) выполняются в любой точке плоскости xOy

5. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $y' = 2\sqrt{y}$

- 1) $y \geq 0$
- 2) $y > 0$
- 3) вся числовая ось

6. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ $y = \varphi(x)$, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ ДАННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ, НАЗЫВАЕТСЯ

- 1) частным решением
- 2) общим решением
- 3) решением

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

7 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ИЗ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО

- 1) частного решения
- 2) общего решения
- 3) интеграла

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

8. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ЗАДАННОМУ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ, НАЗЫВАЮТ

- 1) интегрированием
- 2) задачей Коши
- 3) дифференцированием

9. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЕСТЬ

- 1) интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$
- 2) решение задачи Коши
- 3) семейство интегральных кривых
- 4) решение, полученное из общего при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$

10. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$ ЯВЛЯЕТСЯ РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

- 1) $\frac{y^2}{2} = y'$
- 2) $\frac{2}{3}(xy' + y) = y$
- 3) $xy' + y = y^2$

11. РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $xy' - 2y = 6$ ЯВЛЯЕТСЯ

- 1) $y = x^2 - 3$
- 2) $y = 2x + 1$
- 3) $y = 6x^2 + 1$

12. ФОРМУЛА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЛИНИИ ИЗ ЗАДАННОГО СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ $y = 3x + C$, УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ $y(1) = 5$

- 1) $y = 3x - 2$
- 2) $y = 3x + 5$
- 3) $y = 3x + 2$

13. ФОРМУЛА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЛИНИИ ИЗ ЗАДАННОГО СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ $y = x^2 + \frac{C}{x}$, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ $M_0(1;3)$

1) $y = x^2 + \frac{2}{x}$

2) $y = x^2 - \frac{2}{x}$

3) $y = x^2 + \frac{3}{x}$

Установите правильную последовательность

14. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

- ☐ - записать частное решение (частный интеграл)
- ☐ - используя начальное условие, найти значение C_0
- ☐ - найти общее решение (интеграл) уравнения