

# **Решение дифференциального уравнения. Задача Коши.**

## **Интегральные кривые**

Квантованный учебный текст по математике, с заданиями в тестовой  
форме<sup>1</sup>. Для студентов технических вузов

**Ирина Медведева,**

**Татьяна Черняева**

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Иркутский государственный университет  
путей сообщения»

[chetn2005@yandex.ru](mailto:chetn2005@yandex.ru)

## **Решение дифференциального уравнения**

*Решением дифференциального уравнения* называют функцию  $y = \varphi(x)$ , определенную и непрерывную на интервале  $(a, b)$  вместе со своими производными до  $n$ -го порядка включительно, и обращающую это уравнение в тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

## **Решение ДУ первого порядка**

*Решением дифференциального уравнения*  $F(x, y, y') = 0$  (1) или  $y' = f(x, y)$  (2) называют функцию  $y = \varphi(x)$ , определенную и непрерывную на интервале  $(a, b)$  вместе со своей производной  $y'$ , и удовлетворяющую данному уравнению.

---

<sup>1</sup> Под ред. докт. пед. наук проф. В.С.Аванесова

## **Интегральная кривая**

График решения  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

## **Задача Коши**

Пусть при решении дифференциального уравнения заданы дополнительные *начальные условия*:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \quad [y(x_0) = y_0]. \quad (3)$$

Задача нахождения решения ДУ (1)–(2), удовлетворяющего начальному условию (3), называется *задачей Коши* для ДУ первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

## **Общее решение ДУ первого порядка**

Функция  $y = \varphi(x, C)$  называется *общим решением* ДУ первого порядка (1), если она удовлетворяет условиям:

1) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной  $C$ ,

2) при заданных начальных условиях можно подобрать такое значение произвольной постоянной  $C_0$ , при котором функция  $y = \varphi(x, C_0)$  будет удовлетворять этим условиям.

Общее решение дифференциального уравнения является результатом решения (интегрирования) данного уравнения.

Если при интегрировании уравнения явно выразить искомую функцию не удается, то выражение  $\Phi(x, y) = C$  называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

### **Частное решение ДУ первого порядка**

Решение уравнения (1), полученное из общего при конкретном значении произвольной постоянной  $C = C_0$  называют *частным решением* этого уравнения.

Общее решение ДУ 1-го порядка – семейство (множество) интегральных кривых.

Частное решение – интегральная кривая, проходящая через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

### **Теорема Коши-Пикара (достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши)**

Пусть правая часть уравнения  $y' = f(x, y)$  непрерывна в некоторой окрестности начальной точки  $(x_0, y_0)$  и имеет непрерывную в этой окрестности частную производную  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Тогда уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет единственное решение  $y = \varphi(x)$ , определенное в некоторой окрестности точки  $x_0$  и удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

### **Особое решение**

Решение  $y = \varphi(x)$ , в каждой точке которого нарушается единственность задачи Коши, называется *особым* решением.

Особое решение не может быть получено из формулы общего решения  $y = \varphi(x, C)$  при конкретном числовом значении произвольной постоянной  $C$ .

### **Задания в тестовой форме**

---

*Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большее число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:*

**1. ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЕТСЯ**

- 1) интегрированием
- 2) дифференцированием

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

2. ЗАДАЧА КОШИ ЕСТЬ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО

- 1) начальным
- 2) граничным

УСЛОВИЯМ

3. РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ ОБЩЕГО ПРИ КОНКРЕТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПОИЗВОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ, ЕСТЬ РЕШЕНИЕ

- 1) задачи Коши
- 2) общее
- 3) частное

4. ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  $y' = \frac{1}{y^2}$  УСЛОВИЯ

ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

- 1) нарушаются в каждой точке плоскости  $xOy$
- 2) нарушаются на прямой  $y = 0$
- 3) выполняются в любой точке плоскости  $xOy$

5. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  $y' = 2\sqrt{y}$

- 1)  $y \geq 0$
- 2)  $y > 0$
- 3) вся числовая ось

6. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ  $y = \varphi(x)$ , УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ ДАННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ, НАЗЫВАЕТСЯ

- 1) частным решением
- 2) общим решением
- 3) решением

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

7 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ИЗ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО

- 1) частного решения
- 2) общего решения
- 3) интеграла

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

8. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ЗАДАННОМУ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ, НАЗЫВАЮТ

- 1) интегрированием
- 2) задачей Коши
- 3) дифференцированием

9. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЕСТЬ

- 1) интегральная кривая, проходящая через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$
- 2) решение задачи Коши
- 3) семейство интегральных кривых
- 4) решение, полученное из общего при конкретном значении произвольной постоянной  $C = C_0$

10. ФУНКЦИЯ  $y = \sqrt{x}$  ЯВЛЯЕТСЯ РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

- 1)  $\frac{y^2}{2} = y'$
- 2)  $\frac{2}{3}(xy' + y) = y$
- 3)  $xy' + y = y^2$

11. РЕШЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  $xy' - 2y = 6$  ЯВЛЯЕТСЯ

- 1)  $y = x^2 - 3$
- 2)  $y = 2x + 1$
- 3)  $y = 6x^2 + 1$

12. ФОРМУЛА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЛИНИИ ИЗ ЗАДАННОГО СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ  $y = 3x + C$ , УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ  $y(1) = 5$

- 1)  $y = 3x - 2$
- 2)  $y = 3x + 5$
- 3)  $y = 3x + 2$

13. ФОРМУЛА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЛИНИИ ИЗ ЗАДАННОГО СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ  $y = x^2 + \frac{C}{x}$ , ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ  $M_0(1;3)$

1)  $y = x^2 + \frac{2}{x}$

2)  $y = x^2 - \frac{2}{x}$

3)  $y = x^2 + \frac{3}{x}$

*Установите правильную последовательность*

14. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

- записать частное решение (частный интеграл)
- используя начальное условие, найти значение  $C_0$
- найти общее решение (интеграл) уравнения