

Математика в вузе. Дифференциальные уравнения

Квантованный учебный текст с заданиями в тестовой форме¹

Татьяна Черняева

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего

профессионального образования

Иркутский государственный университет

путей сообщения

chetn2005@yandex.ru

Опубликовано в ж. «Педагогические Измерения»; 2012 г.

Дифференциальное уравнение

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и её производные или дифференциалы.

Порядок ДУ

Порядком ДУ называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Например:

- 1) $y' \sin x = y \ln y$ - ДУ 1-го порядка,
- 2) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y' = 0$ - ДУ 2-го порядка,
- 3) $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg}x$ - ДУ 3-го порядка.

ДУ n-го порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

между независимой переменной x , функцией $y(x)$ и её производными $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

¹ Ред. докт. пед наук, проф. В.С. Аванесов

Виды ДУ

Если неизвестная функция в уравнении (1) зависит от одной независимой переменной $y = y(x)$, то ДУ называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*, если от нескольких переменных $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то ДУ называется *уравнением в частных производных*. Мы будем рассматривать только обыкновенные ДУ и их системы.

Уравнение, разрешённое относительно старшей производной

Если уравнение (1) удается разрешить относительно $y^{(n)}$, то получим *уравнение, разрешённое относительно старшей производной*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Решение ДУ

Решением ДУ называют функцию $y = \varphi(x)$, определенную на интервале (a, b) вместе со своими производными до n -го порядка включительно, и такую, что подстановка функции $y = \varphi(x)$ в ДУ превращает последнее в тождество $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Процесс нахождения решений ДУ называется *интегрированием* этого уравнения.

Задача Коши для ДУ

Задача нахождения решения уравнения (2) или (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_1, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n-1}, \quad (3)$$

где y_0, y_1, \dots, y_{n-1} – заданные числа, называется *задачей Коши* для ДУ.

Общее решение ДУ

Функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольные постоянные, будем называть *общим решением* уравнения (1), если в (a, b) при

соответствующем выборе постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ эта функция обращается в решение любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения, при $x_0 \in (a, b)$.

Частное решение ДУ

Решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ (в частности, всякое решение задачи Коши), называется *частным решением* (*частным интегралом*) этого уравнения.

ДУ первого порядка

Если порядок ДУ (1) $n=1$, то дифференциальное уравнение – первого порядка и в общем виде запишется так:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (4)$$

Уравнение, разрешённое относительно первой производной

Дифференциальное уравнение (4), *разрешённое относительно производной y'* , имеет вид

$$y' = f(x, y). \quad (5)$$

Общее решение ДУ первого порядка

Общим решением ДУ первого порядка будет функция $y = \varphi(x, C)$, которая содержит только одну произвольную постоянную C . В случае $n=1$ начальные условия (3) имеют вид

$$y|_{x=x_0} = y_0, . \quad (6)$$

где x_0, y_0 – заданные числа

Решение $y = \varphi(x, C_0)$ ДУ (4), удовлетворяющее начальному условию (6), называется *частным решением* ДУ (4).

Задача отыскания частного решения ДУ (4) или (5), удовлетворяющего начальному условию (6), называется *задачей Коши* для ДУ первого порядка.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*.

Задания в тестовой форме

Вашему вниманию предлагаются задания, в которых может быть один, два, три и большое число правильных ответов. Нажимайте на клавиши с номерами всех правильных ответов:

1. ПОРЯДОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ { $y' \sin x = y \ln y$,
 $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y' = 0$, $y''' = 2(y'' - 1)ctgx$ }
 - 1) первый
 - 2) второй
 - 3) третий
 - 4) четвертый
 - 5) n -ый
2. УРАВНЕНИЕ {обыкновенное дифференциальное , в частных производных}
ЗАВИСИТ ОТ
 - 1) одной
 - 2) нескольких
 - 3) n

НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
3. УРАВНЕНИЕ, РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ
 - 1) $y' \sin x = y \ln y$
 - 2) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y' = 0$
 - 3) $y''' = 2(y'' - 1)ctgx$
 - 4) $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$
 - 5) $y' = f(x, y)$
4. ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
НАЗЫВАЕТСЯ
 - 1) интегрированием
 - 2) дифференцированием
5. ЗАДАЧА КОШИ ЕСТЬ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО
 - 1) начальным
 - 2) граничным

УСЛОВИЯМ
6. РЕШЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ ОБЩЕГО ПРИ КОНКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ, ЕСТЬ РЕШЕНИЕ
 - 1) задачи Коши
 - 2) частное
 - 3) общее

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ {первого, второго, третьего, n -го} ПОРЯДКА

- 1) $y' \sin x = y \ln y$
- 2) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y' = 0$
- 3) $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$
- 4) $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$
- 5) $y' = f(x, y)$

8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- 1) $y'^5 + y'' = x^7$
- 2) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = 5x$
- 3) $F(x, y, y'') = 0$
- 4) $xy'^2 - 9y = y^2$
- 5) $y^2 - y' = 0$

9. ЯВЛЯЕТСЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- 1) $y' + y'' = x$
- 2) $y'' + 17xy' + y = 0$
- 3) $F(x, y, y', y'') = 0$
- 4) $y'^2 + xy = y^2$
- 5) $y' - xy = y^2$

10. ЯВЛЯЕТСЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

- 1) $y' + 2y = 5$
- 2) $x dx - y dy = 0$
- 3) $x^3 y' - 12y = x^7$
- 4) $y'^4 + x^3 y''' = x^2$
- 5) $F(x, y, y', y'') = 0$

11. ЯВЛЯЕТСЯ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

- 1) $y'^3 + y''y''' = x^5$
- 2) $\frac{d^3 y}{dx^3} - 8xy \frac{dy}{dx} = x$

3) $x^2 y' + 10xy = y^3$

4) $F(x, y, y', y'') = 0$

Установите правильную последовательность

12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО ВОЗРАСТАНИЮ ИХ ПОРЯДКА

1) $x^2 y' - y \sin x = x^4$

2) $x'' - 3x' + 2x = t \sin t$

3) $(2y + 3)y''' - 2(y'')^2 = 0$

4) $y^{VI} - 8y^V + 7y^{IV} = e^x$

Дополните

13. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ЗАДАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ, НАЗЫВАЮТ ЗАДАЧЕЙ _____.

14. ФУНКЦИЯ $y = e^{2x} - 1$, удовлетворяющая начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ для дифференциального уравнения $y'' - 2y' = 0$, является _____ решением данного дифференциального уравнения.

15. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется _____ дифференциального уравнения.

16. Дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке вместо неизвестной функции обращается в тождество, называется _____ дифференциального уравнения.

17. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется _____ дифференциального уравнения.

18. Начальные условия используются для выделения из множества решений дифференциального уравнения определенного _____ решения.